Espaços Vetoriais ou Espaços Lineares

Consiste de um conjunto $\mathcal{X}$ de elementos chamados **vetores**.

- Operações **soma vetorial** e **multiplicação por escalar**.
- Elemento **nulo** $0 \in \mathcal{X}$

Propriedades:

$$x + y = y + x \ , \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{X} \qquad \text{(comutativa)}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z) \ , \ \ \forall \ x, y, z \in \mathcal{X} \qquad \text{(associativa)}$$

$$0 + x = x \ , \ \ \forall \ x \in \mathcal{X}$$

$$\forall \ x \in \mathcal{X} \ , \ \ \exists \ (-x) \in \mathcal{X} \quad \text{tal que} \quad x + (-x) = 0$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \ , \ \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ , \ \ \forall \ x \in \mathcal{X}$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \ , \ \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{X}$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \ , \ \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ , \ \ \forall \ x \in \mathcal{X}$$

$$1x = x \ , \ \ \forall \ x \in \mathcal{X}$$

Exemplos

• Espaço $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, com as operações de adição vetorial e multiplicação por escalar definidas de maneira convencional

• $\mathcal{Y} = \{0\}$, $0 \in \mathbb{R}^n$

• $\mathcal{Z} = \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$

$$\text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \ : \ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

• $\mathcal{W} = \{f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \ , \ \ f \text{ diferenciável}\}$

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) \qquad \text{(soma)}$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) \qquad \text{(multiplicação por escalar)}$$

Note que um elemento em $\mathcal{W}$ é uma trajetória no $\mathbb{R}^n$

• $\mathcal{V} = \{x \in \mathcal{W} \ : \ \dot{x} = Ax\}$

Os elementos de $\mathcal{V}$ são trajetórias do $\mathbb{R}^n$ soluções do sistema linear $\dot{x} = Ax$

• Espaço dos polinômios em s de grau menor ou igual a n

Um subespaço vetorial é um subconjunto que é também um espaço vetorial

• $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ são subespaços do $\mathbb{R}^n$

• $\mathcal{V}$ é um subespaço de $\mathcal{W}$

• $x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha x_1 \end{bmatrix}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^2$

• Os parâmetros considerados neste curso são números reais (a menos que seja especificado diferentemente).

Matrizes: A $(n \times m)$, B $(m \times r)$, C $(l \times n)$, D $(r \times p)$

Seja a_i a i-ésima coluna de A e b_j a j-ésima linha de B:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$$

$$CA = C \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ca_1 & Ca_2 & \cdots & Ca_m \end{bmatrix}$$

$$BD = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_1 D \\ b_2 D \\ \vdots \\ b_m D \end{bmatrix}$$

$a_i b_i$: matriz n por r (vetor $n \times 1$ multiplicado por vetor $1 \times r$)
$b_i a_i$: só está definido para $n = r$ (escalar)

• Espaço real de dimensão n: $\mathbb{R}^n$

Cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é uma ênupla de números reais

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, é **linearmente dependente** (LD) se e somente se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

Se a igualdade for verdadeira apenas para $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, diz-se então que o conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é *linearmente independente* (LI).

Se um conjunto de vetores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ é linearmente dependente, existe pelo menos um α_i diferente de zero e (por exemplo, se $\alpha_1 \neq 0$)

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\left[\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \cdots + \alpha_n x_n\right]$$

isto é, um dos vetores (mas não necessariamente qualquer um) pode ser escrito como uma combinação linear dos demais.

Equivalentemente, os vetores são LI se

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \beta_1 \ ; \quad \alpha_2 = \beta_2 \ ; \quad \cdots \ ; \quad \alpha_n = \beta_n$$

Ou ainda, se nenhum vetor x_i puder ser expresso como combinação linear dos demais.

O conceito de dependência linear depende do tipo (corpo) do escalar considerado.

Consirede o conjunto das funções racionais em s

$$\left\{\frac{s}{s+1}, \frac{1}{s+2}\right\}$$

Não existem escalares reais α_1, α_2 não todos nulos tais que

$$\alpha_1\frac{s}{s+1} + \alpha_2\frac{1}{s+2} = 0$$

No entanto, para escalares pertencentes ao corpo das funções racionais em s, a igualdade vale se

$$\alpha_1 = -\frac{1}{s+2} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{s}{s+1}$$

A **dimensão** de um espaço vetorial é o número máximo de vetores LI desse espaço.

• Assim, no $\mathbb{R}^n$ há no máximo n verores LI.

• A dimensão de um espaço vetorial pode ser infinita: considere o espaço das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Em particular, as funções $t, t^2, t^3, \ldots$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^i = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$$

Um conjunto de vetores LI do $\mathbb{R}^n$ é uma **base** se qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ puder ser expresso de forma única como uma combinação linear destes vetores.

• Em um espaço de dimensão n, qualquer conjunto de n vetores LI forma uma base

• Quaisquer duas bases de um espaço n-dimensional possuem o mesmo número de elementos.

Se $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ forma uma base para o $\mathbb{R}^n$, então qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \cdots + \alpha_n q_n$$

Definindo a matriz quadrada Q $(n \times n)$

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

$$x = Q \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q\alpha$$

$\alpha \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}'$ é a representação de x na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$.

A qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, pode-se associar a base ortonormal

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um vetor x na base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se escreve

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = \mathbf{I}_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ se confunde com sua representação.

Exemplo: Considere o conjunto dos polinômios de grau menor do que 4.

Base: $e_1 = s^3$; $e_2 = s^2$; $e_3 = s$; $e_4 = 1$
Se $x = s^3 + 4s^2 - 4s + 10$, então

$$x = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 & 10 \end{bmatrix}'$ é a representação de x na base escolhida.

Mudança de Base

Se β e $\bar{\beta}$ são as representações de um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ em relação às bases $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$, então

$$x = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \beta = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\beta}$$

$\longrightarrow$ representar e_i em termos de $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ ou vice-versa.

Seja $p_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$ a representação de e_i na base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$:

$$\begin{aligned} e_i &= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \\ &\triangleq E p_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Usando notação matricial

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ep_1 & Ep_2 & \cdots & Ep_n \end{bmatrix} \\ &= E \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P \end{aligned}$$

$$x = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} P\beta = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\beta}$$

Como a representação é única: $\bar{\beta} = P\beta$

Analogamente, representando $\bar{e}_i$ na base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, obtém-se

$$\beta = Q\bar{\beta}$$

$\rightarrow$ conhecida a representação de um vetor numa base, a representação em outra base pode ser automaticamente determinada:

$$\bar{\beta} = P\beta = PQ\bar{\beta} \quad , \quad \forall \bar{\beta}$$

$$PQ = \mathbf{I} \quad \rightarrow \quad P = Q^{-1}$$

Exemplo: polinômios de grau menor do que 4.

Base: $\bar{e}_1 = s^3 - s$; $\bar{e}_2 = s^2 - s$; $\bar{e}_3 = s - 1$; $\bar{e}_4 = 1$
Se $x = s^3 + 4s^2 - 4s + 10$, então

$$x = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 & \bar{e}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Transformação Linear

Uma função $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um **operador linear** se

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

para quaisquer escalares α_1, α_2 e $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

$$y = f(x) \;\; ; \quad x \in \mathcal{X} \text{ (domínio) }, \;\; y \in \mathcal{Y} \text{ (range)}$$

• Exemplo: seja g uma função contínua sobre $[0, T]$. A transformação

$$y(t) = \int_0^T g(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

é linear, levando do espaço das funções contínuas no intervalo $[0, T]$ para o mesmo espaço.

Teorema: Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços lineares de dimensão n e m, respectivamente. Sejam $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vetores LI de $\mathcal{X}$. Então, o operador linear $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é unicamente determinado pelos n pares $y_i = L(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso, com relação à base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de $\mathcal{X}$ e à base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ de $\mathcal{Y}$, L pode ser representado por uma matriz A $m \times n$. A i-ésima coluna de A é a representação de y_i na base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$.

Prova: Como L é linear,

$$L(x) = L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

$$= \alpha_1 L(x_1) + \alpha_2 L(x_2) + \cdots + \alpha_n L(x_n) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$$

Seja $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ a representação de y_i na base $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$

$$y_i = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} L(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}) &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} A \end{aligned}$$

Em relação às bases $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$,

$$\begin{aligned} y &= L(x) \\ \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} \beta &= L(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \alpha) \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \end{bmatrix} A\alpha \\ \beta &= A\alpha \end{aligned}$$

Para se descrever a transformação, não há diferença entre especificar x, y ou α, β. É claro que A (representação da transformação linear) depende das bases escolhidas.

Transformação de Similaridade

Considere a transformação linear $L\ :\ \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, com a mesma base para o domínio $\mathcal{X}$ e o range $\mathcal{Y}$.

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \ \to \ A \quad , \quad \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\} \ \to \ \bar{A}$$

$$x \xrightarrow{\quad L \quad} y\ (= L(x))$$

$$\begin{tikzcd}
\left[\, e_1 \ \ e_2 \ \ \cdots \ \ e_n \,\right] \alpha \arrow[rr, "A"] \arrow[d, shift right=2, "P"'] & & \beta\ (= A\alpha) \arrow[d, shift right=2, "P"'] \\
\left[\, \bar{e}_1 \ \ \bar{e}_2 \ \ \cdots \ \ \bar{e}_n \,\right] \bar{\alpha} \arrow[rr, "\bar{A}"] \arrow[u, shift right=2, "Q"'] & & \bar{\beta}\ (= \bar{A}\bar{\alpha}) \arrow[u, shift right=2, "Q = P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\bar{\beta} = \bar{A}\bar{\alpha}\ ;\ \bar{\beta} = P\beta = PA\alpha = PAP^{-1}\bar{\alpha}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{A}\bar{\alpha} = PAP^{-1}\bar{\alpha} \ \ , \ \ \forall \alpha$$

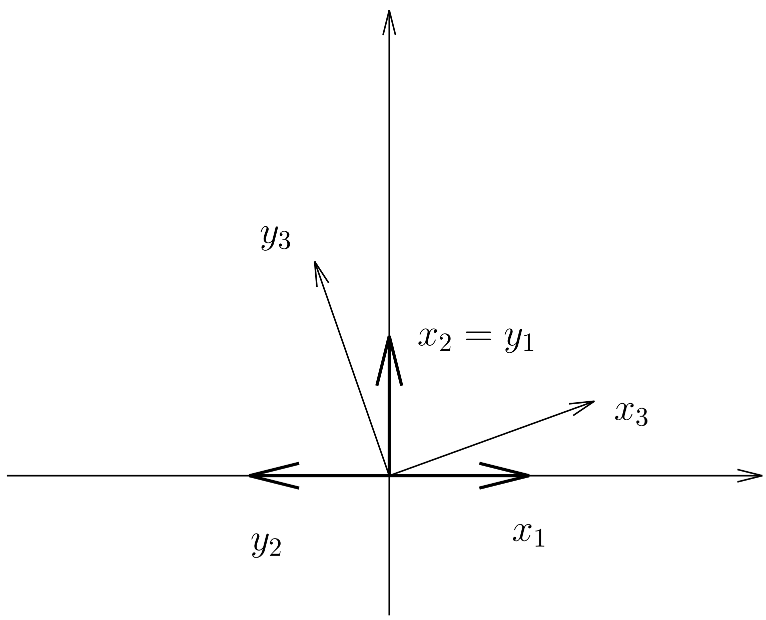
$$\bar{A} = PAP^{-1} = Q^{-1}AQ \ \ ; \ \ A = P^{-1}\bar{A}P = Q\bar{A}Q^{-1} \quad \Longrightarrow \quad Q = P^{-1}$$

A, $\bar{A}$: matrizes **similares**

PAP^{-1}, $P^{-1}\bar{A}P$: **Transformações de Similaridade**

Todas as representações de um operador linear são similares. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pode ser vista como a representação de um operador linear ou como o operador linear propriamente dito.

• Exemplo de transformação linear: a transformação que rotaciona um ponto no plano de 90^o no sentido anti-horário



Em relação à base $\{x_1, x_2\}$

$$y_1 = L(x_1) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad y_2 = L(x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A representação de y_3 com relação à base $\{x_1, x_2\}$ é

$$\begin{aligned} \beta &= A\alpha \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ é a representação de x_3 na base $\{x_1, x_2\}$

Matriz como Operador Linear

Seja a função linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ descrita pela matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$y = L(x) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$$

$$= \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \cdots + \alpha_n A x_n \quad \Longrightarrow y_i = A x_i, \ \ i = 1 \cdots n$$

Na base ortonormal, $x_i = e_i$ e, portanto, $y_i = Ae_i = a_i$ (i-ésima coluna de A) que coincide com sua representação na base ortonormal unitária (representação de $A = A$)

- Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Considere os vetores $\{b, Ab, A^2b\}$ (são LI):

$$Ab = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^2b = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad A^3b = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$\bar{A}$ é a representação de A na base $\{b, Ab, A^2b\}$:

$$A(b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad A(Ab) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(A^2b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

(Forma Companheira)

Representação de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \quad ; \quad Q \triangleq \left[\, q_1 \;\; q_2 \;\; \cdots \;\; q_n \, \right]$$

i-ésima coluna de Q:
$\Longrightarrow$ representação de q_i na base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\} \; = \; q_i$

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ \quad \rightarrow \quad Q\bar{A} = AQ$$

ou, como $Q = \left[\, q_1 \;\; q_2 \;\; \cdots \;\; q_n \, \right]$,

$$\left[\, q_1 \;\; q_2 \;\; \cdots \;\; q_n \, \right] \bar{A} = \left[\, Aq_1 \;\; Aq_2 \;\; \cdots \;\; Aq_n \, \right]$$

$\bar{a}_i$ é a i-ésima coluna de $\bar{A}$, representação de Aq^i na base $\{q_1, \ldots, q_n\}$. Uma escolha adequada da base $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ pode levar a representações importantes.

Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se existir um vetor $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ tal que o conjunto de n vetores $\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$ seja linearmente independente e se

$$A^n b = \beta_1 b + \beta_2 Ab + \cdots + \beta_n A^{n-1} b$$

então a representação de A na base $\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$ é dada por (forma companheira)

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n \end{bmatrix}$$

Norma de vetores

Qualquer função real representada por $\|x\|$ pode ser definida como uma **norma** se para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$

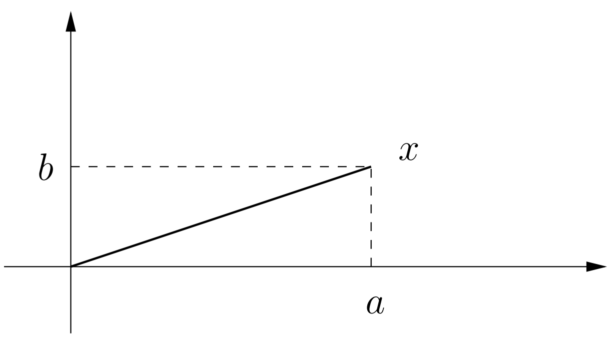
1. $\|x\| \geq 0 \;\; ; \;\; \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\alpha x\| = \mid \alpha \mid \|x\|$
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ (Desigualdade Triangular)

Exemplo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad p \geq 1 \quad p \text{ inteiro}$$

$\|x\|_2 = \sqrt{x'x}$ (norma Euclidiana)

$\|x\|_\infty = \max_i \mid x_i \mid$ (norma infinito)



$\|x\|_1 = \mid a \mid + \mid b \mid \; ; \quad \|x\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \; ; \quad \|x\|_\infty = \max\{\mid a \mid, \mid b \mid\}$

Produto Interno

Para dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, define-se o produto interno (ou produto escalar) como

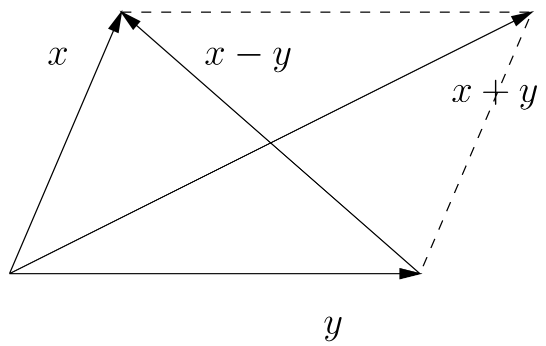
$$\langle x, y \rangle \triangleq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = x' y$$

Propriedades:

- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$
- o vetor x' pode ser visto como uma função linear $x' \; : \; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Identidade do paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$



Teorema: (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Defina $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$. Então,

$$| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \|y\|$$

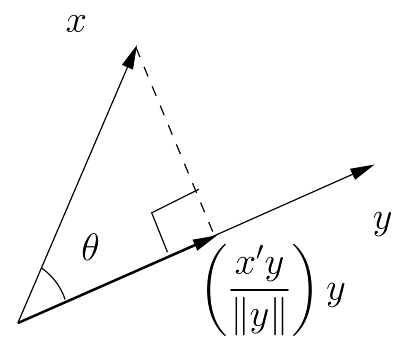
Prova: Para $y = 0$, a prova é imediata. Assumindo $y \neq 0$,

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle y, y \rangle$$

vale $\forall\ \alpha$. Escolhendo $\alpha = -\dfrac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$, tem-se

$$\langle x, x \rangle \geq \frac{\langle x, y \rangle \langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{\langle y, y \rangle}$$

O ângulo θ entre quaisquer dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ é dado por



$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{x'y}{\|x\| \|y\|} \right) \quad \Longrightarrow \quad x'y = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

Produto Interno

$$x'y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

• Se x e y são colineares: $\theta = 0$, $x'y = \|x\|\|y\|$ e se $x \neq 0$ $y = \alpha x$ para algum $\alpha \geq 0$

• Se x e y são vetores opostos: $\theta = \pi$, $x'y = -\|x\|\|y\|$ e se $x \neq 0$ $y = -\alpha x$ para algum $\alpha \geq 0$

• Se x e y são vetores ortogonais ($x \perp y$): $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x'y = 0$

• $x'y > 0 \Longrightarrow$ ângulo agudo; $x'y < 0 \Longrightarrow$ ângulo obtuso

• Dado um vetor $y \in \mathbb{R}^n$, o conjunto

$$\{x \ : \ x'y \leq 0\}$$

define um semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ (y é chamado vetor normal) passando no ponto 0