Autovalores e autovetores

Um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** (valor próprio) de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se existe um vetor $x \in \mathbb{C}^n$ não nulo tal que

$$Ax = \lambda x$$

Qualquer vetor $x \in \mathbb{C}$ que satisfaça $Ax = \lambda x$ é chamado de **autovetor** (vetor próprio) de A associado a λ (mais precisamente, esta é a definição para autovetores à direita de A).

- $Ax = \lambda x$ pode ser visto como $(A - \lambda \mathbf{I})x = 0$
- $\exists x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \ : \ (A - \lambda \mathbf{I})x = 0 \ \Leftrightarrow \ \det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0$
- $\Delta(\lambda) \triangleq \det(\lambda \mathbf{I} - A)$: polinômio (mônico) característico de A
- $\Delta(\lambda) = 0$: **equação característica** de A
- Grau de $\Delta(\lambda) = n$ e portanto $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ possui n autovalores.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; $A - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{Co}_{ij}$; Co_{ij} : cofator de a_{ij}

$\mathrm{Co}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; M_{ij} : det de A sem a linha i e a coluna j

Note que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$$

Essa condição é equivalente à existência de $y \in \mathbb{C}$ tal que

$$y'A = \lambda y' \quad \Longrightarrow \quad y'(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$$

e qualquer y que satisfaça a relação acima é chamado de autovetor à esquerda de A (associado ao autovalor λ).

- Se $v \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor associado a $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\bar{v}$ (complexo conjugado de v) é um autovetor associado a $\bar{\lambda}$.

- Se v é um autovetor de A, a transformação linear A aplicada sobre v produz um escalonamento de λ (na direção v).

- Matrizes na forma companheira

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e suas transpostas têm o seguinte polinômio característico:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \alpha_1\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_3\lambda + \alpha_4$$

Autovalores distintos

Teorema: Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de A e v_i um autovetor de A associado ao autovalor λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, o conjunto de autovetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LI.

Prova: Primeiramente, note que

$$(A - \lambda_j \mathbf{I})v_i = \begin{cases} (\lambda_i - \lambda_j)v_i & , \ j \neq i \\ 0 & , \ j = i \end{cases}$$

Supondo (por absurdo) que $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$$

Sem perda de generalidade, assuma $\alpha_1 \neq 0$. Então,

$$(A - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) v_i$$

$$(A - \lambda_{n-1} \mathbf{I})(A - \lambda_n \mathbf{I}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n)(\lambda_i - \lambda_{n-1}) v^i$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n) v_1 = 0$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, n$, $\alpha_1 = 0$, o que contradiz a hipótese inicial. Como conclusão,

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \ \text{LI} \quad \rightarrow \quad \text{Base do } \mathbb{C}^n$$

Forma Diagonal

Seja $\bar{A}$ a representação de A na base formada pelos autovetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

i-ésima coluna de $\bar{A}$ = representação de

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

na base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Então,

$$Av_i = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = Q^{-1}AQ \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Existe uma representação diagonal se todos os autovalores de A são distintos.

• Q define uma transformação de similaridade que diagonaliza a matriz A

• Portanto, se $Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ é tal que $\bar{A} = Q^{-1}AQ$ é uma matriz diagonal, então

$$AQ = Q\bar{A} \quad \Longrightarrow \quad Av_i = \lambda_i v_i \ , \quad i = 1 \cdots n$$

e $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ são autovetores LI de A.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$(A - \lambda_1 \mathbf{I})v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -v_{31} = 0 \\ v_{21} = 0 \\ 2v_{31} = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_2 \mathbf{I})v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -v_{12} - v_{32} = 0 \\ \\ v_{32} = 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_3 \mathbf{I})v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} -2v_{13} - v_{33} = 0 \\ -v_{23} = 0 \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \quad v_{13} = -0.5 v_{33} \quad ; \quad v_3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{v_1, v_2, v_3\} \text{ são LI} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Considere entretanto $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

$(A - \lambda_1 \mathbf{I})v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = 0 \text{ Soluções LI } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_3 \mathbf{I})v_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = 0 \; ; \; v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

- Multiplicidade Geométrica (MG) de λ_1 : 2 (número de soluções LI associadas ao autovalor)

- No caso geral, tem-se: Multiplicidade Geométrica (MG) $\leq$ Multiplicidade Algébrica (MA)

- Se a Multiplicidade Geométrica for menor que a Multiplicidade Algébrica, não é possível determinar autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ LI.

Autovalores complexos

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinômio característico: $(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$

Autovalores: -1, $2 + j3$ e $2 - j3$

Note que autovalores complexos sempre aparecem em pares complexo conjugados para matrizes com coeficientes reais.

$$\text{Autovetores:} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} j \\ -3 + j2 \\ j \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} -j \\ -3 - j2 \\ -j \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & j & -j \\ 0 & -3 + j2 & -3 - j2 \\ 0 & j & -j \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + j3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - j3 \end{bmatrix}$$

• Para autovalores não distintos, nem sempre é possível obter $\bar{A}$ na forma diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 5 \;\; , \;\; \text{MA} = 2$$

$$(A - \lambda_1 \mathbf{I})v_1 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 0 \; ; \; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; ; \; \text{MG} = 1$$

Forma Canônica de Jordan

Define-se como $J_k(\lambda)$ o bloco de Jordan de dimensão $k \times k$ associado ao autovalor λ, dado por

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k}$$

Para qualquer matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe uma matriz não singular Q tal que

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix}, \ k_1 + \cdots + k_r = n$$

sendo que A tem r autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ entre n possíveis.

Associados aos r autovalores distintos, pode-se determinar r autovetores LI $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ a partir de

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})v_i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

- $\bar{A}$ é em geral bidiagonal superior, sendo diagonal no caso de n blocos de Jordan de tamanho $k = 1$

- A forma de Jordan é única para uma dada matriz A (salvo eventuais permutações entre os blocos)

- Pode haver múltiplos blocos associados ao mesmo autovalor

Os autovetores associados ao bloco de Jordan $J_{k_i}(\lambda_i)$ são determinados a partir de

$$\begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{ik_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{ik_i} \end{bmatrix}$$

Definindo $v_{i1} \triangleq v_i$ (autovetor associado ao autovalor λ_i) tem-se

$$\begin{array}{ccc} \lambda_i v_{i1} = A v_{i1} & \Longrightarrow & (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i1} = 0 \\ v_{i1} + \lambda_i v_{i2} = A v_{i2} & \Longrightarrow & (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i2} = v_{i1} \\ \vdots & & \\ v_{i(k_i-1)} + \lambda_i v_{ik_i} = A v_{ik_i} & \Longrightarrow & (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{ik_i} = v_{i(k_i-1)} \end{array}$$

• Note que sempre existe $v_{i1} \neq 0$ tal que $(A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i1} = 0$ (definição de autovetor)

• Da equação que define v_{i2} tem-se

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})(A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i2} = (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i1} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (A - \lambda_i \mathbf{I})^2 v_{i2} = 0 \\ (A - \lambda_i \mathbf{I}) v_{i2} \neq 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \text{Autovetor Generalizado de } \lambda_i$$

v é um **autovetor generalizado** de grau ℓ de A associado ao autovalor λ se

$$\begin{array}{rcl} (A - \lambda \mathbf{I})^{\ell} v & = & 0 \\ (A - \lambda \mathbf{I})^{\ell-1} v & \neq & 0 \end{array}$$

Note que um autovetor generalizado v de grau 1 satisfaz

$$(A - \lambda \mathbf{I})v = 0 \quad ; \quad v \neq 0$$

e portanto é um autovetor.

• O número de blocos de Jordan associados ao autovalor λ é dado por

$$\nu(A - \lambda \mathbf{I})$$

• A forma canônica de Jordan é útil do ponto de vista conceitual, não sendo usada para cálculos computacionais.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \quad ; \quad \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2\mathbf{I})v_1 = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1a} \\ v_{1b} \\ v_{1c} \end{bmatrix} = 0 \quad ; \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para o autovalor $\lambda_2 = 1$:

$$(A - 1\mathbf{I})v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

Note que a 3^a linha é igual à 1^a mais $(4\times)2^a \quad \Longrightarrow \quad \nu(A - 1\mathbf{I}) = 1$

Portanto, existe 1 bloco de Jordan associado ao autovalor $\lambda = 1$; com isso, sabe-se que a forma de Jordan é dada por

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Um autovetor v_2 pode ser obtido da expressão acima:

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3/7 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

A partir de $v_{21} \triangleq v_2$ determina-se o autovetor generalizado v_{22}

$$(A - 1\mathbf{I})v_{22} = v_{21} \quad ; \quad v_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22/49 \\ 46/49 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} v_1 & v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

- "Ajuda" do Matlab é bem-vinda.

Considere $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica igual a 4. Assuma que $\nu(A - \lambda\mathbf{I}) = 1$. Assim,

$$(A - \lambda\mathbf{I})v = 0$$

possui apenas uma solução linearmente independente v_1. Para formar uma base do $\mathbb{R}^4$, três outros vetores LI são necessários. Os três vetores (autovetores generalizados) v_2, v_3 e v_4 devem satisfazer as propriedades:

$$\begin{aligned}(A - \lambda\mathbf{I})^2 v_2 = 0\\ (A - \lambda\mathbf{I})^3 v_3 = 0\\ (A - \lambda\mathbf{I})^4 v_4 = 0\end{aligned}$$

A partir de um vetor v, a cadeia de autovetores generalizados de tamanho 4 pode ser gerada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v_4 &\triangleq v\\ v_3 &\triangleq (A - \lambda\mathbf{I})v_4 = (A - \lambda\mathbf{I})v\\ v_2 &\triangleq (A - \lambda\mathbf{I})v_3 = (A - \lambda\mathbf{I})^2 v\\ v_1 &\triangleq (A - \lambda\mathbf{I})v_2 = (A - \lambda\mathbf{I})^3 v\end{aligned}$$

Como pode ser verificado, valem as propriedades: $(A - \lambda\mathbf{I})v_1 = 0$, $(A - \lambda\mathbf{I})^2 v_2 = 0$, $(A - \lambda\mathbf{I})^3 v_3 = 0$ e $(A - \lambda\mathbf{I})^4 v_4 = 0$.

Os vetores gerados dessa maneira são LI. Das equações, obtêm-se

$$\begin{aligned}Av_1 &= \lambda v_1\\ Av_2 &= v_1 + \lambda v_2\\ Av_3 &= v_2 + \lambda v_3\\ Av_4 &= v_3 + \lambda v_4\end{aligned}$$

Forma de Jordan (representação na base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$):

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

• Se a ordem dos vetores da base for invertida, a representação passa a ser bidiagonal inferior.

Considere agora $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica igual a 4 mas $\nu(A - \lambda\mathbf{I}) = 2$. Assim,

$$(A - \lambda\mathbf{I})v = 0$$

possui 2 soluções LI. Dois autovetores podem ser obtidos e $n - 2 = 4 - 2 = 2$ autovetores generalizados são necessários.

A partir de cada um dos autovetores, gera-se uma cadeia de autovetores generalizados. As possíveis formas de Jordan neste caso são:

$$\bar{A}_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right] \quad ; \quad \bar{A}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right]$$

Exemplo

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Propriedade (A e C matrizes quadradas)

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \det C$$

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{I}) = [(3-\lambda)(1-\lambda)+1]\,(2-\lambda)^2\left[(1-\lambda)^2 - 1\right]$$
$$= (2-\lambda)^2(2-\lambda)^2(2-\lambda)\lambda = (2-\lambda)^5\lambda$$

Autovalores: $\lambda_1 = 2$, MA$=5$; $\lambda_2 = 0$, MA$=1$

$$(A - 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(A - 2\mathbf{I}) = 4 \;\Rightarrow\; \nu_1 = \nu(A - 2\mathbf{I}) = 6 - 4 = 2 \;\rightarrow\; \text{MG} = 2$$

• A forma de Jordan apresenta dois blocos (MG=2) associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & v_1 & v_2 & v_3 & u_1 & u_2 \end{array}\right]$$

• x, v_1 e u_1 são autovetores

$$\bar{A} = Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c|ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

• Nem sempre é fácil determinar a cadeia de autovetores generalizados. Por exemplo, se v é autovetor, $-v$ também é, mas os autovetores generalizados podem ser diferentes

$$Ax = v + \lambda x \quad ; \quad Ay = -v + \lambda y$$

Autovalores e Autovetores de Matriz Simétrica

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$

- Autovetores v_i, v_j associados a autovalores distintos $\lambda_i \neq \lambda_j$ são ortogonais, isto é

$$\langle v_i, v_j \rangle = v_i' v_j = 0$$

Para mostrar que os autovalores são reais, note que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor e $v \in \mathbb{C}^n$ é um autovetor genérico de A

$$Av = \lambda v \quad ; \quad v \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad v^* A v = \lambda v^* v$$

Tomando o conjugado transposto da expressão (escalar) acima e lembrando que $A^* = A$ (matriz simétrica)

$$(v^* A v)^* = (v^* A v) = \bar{\lambda} v^* v$$

Subtraindo

$$0 = (\lambda - \bar{\lambda}) v^* v \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \bar{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para mostrar a ortogonalidade de autovetores associados a autovalores distintos:

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad \Longrightarrow \quad v_j' A v_i = \lambda_i v_j' v_i$$

$$Av_j = \lambda_j v_j \quad \Longrightarrow \quad v_i' A v_j = \lambda_j v_i' v_j$$

Como o lado esquerdo das expressões acima é igual ($A = A'$), subtraindo

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle \quad \Longrightarrow \quad v_i \perp v_j \text{ se } \lambda_i \neq \lambda_j$$

A forma de Jordan de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é diagonal.

Para provar, mostra-se que não existem autovetores generalizados de grau $k \geq 2$. Suponha, por absurdo, que para algum λ_i

$$(A - \lambda_i \mathbf{I})^k v = 0 \ \text{ e } \ (A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} v \neq 0 \ \ (k \geq 2)$$

Entretanto

$$\langle (A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-2} v, (A - \lambda_i \mathbf{I})^k v \rangle = 0$$

Usando a simetria de A

$$\langle (A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} v, (A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} v \rangle = \|(A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} v\|^2 = 0$$

$$\iff (A - \lambda_i \mathbf{I})^{k-1} v = 0$$

o que contradiz a hipótese inicial. Portanto, não existe nenhum bloco de Jordan cuja ordem seja maior do que 1

$$\exists\, Q \ : \ \bar{A} = Q^{-1} A Q \quad \rightarrow \quad \text{diagonal}$$

• Se $A = A'$, $\bar{A} = \bar{A}'$ é uma matriz diagonal (com os autovalores reais na diagonal) e a base formada pelos autovetores é tal que

$$Q'Q = \mathbf{I} \qquad \text{(base ortonormal)}$$

$$(Q^{-1} A Q)' = Q' A Q^{-1} = Q^{-1} A Q \quad \Longrightarrow \quad Q^{-1} = Q'$$