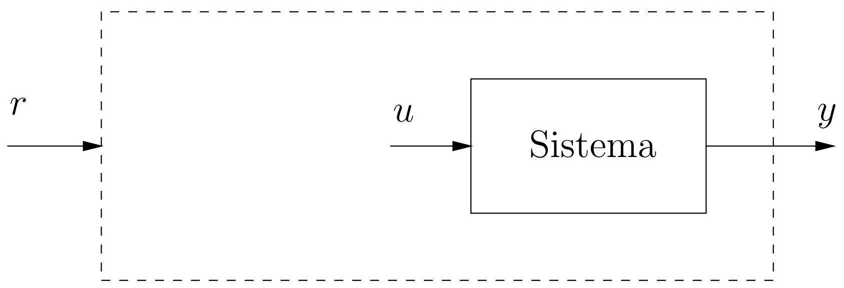
Projeto de Compensadores

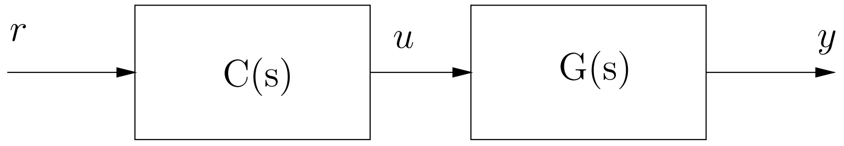
De maneira geral, o projeto de um sistema de controle pode ser ilustrado pela figura abaixo:



• Dado um sistema (planta) com uma entrada u e uma saída y e um sinal de referência r, projete um controlador que faça com que a saída y siga o sinal de referência r tão próximo quanto possível.

u : sinal de atuação ; y : saída controlada

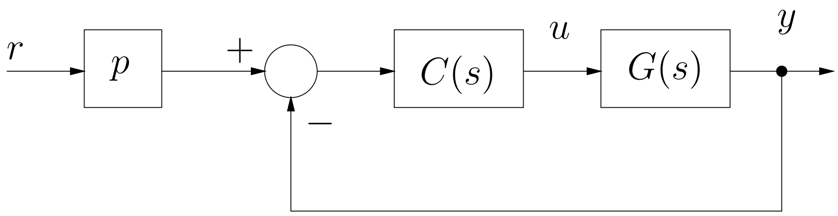
Controle em malha aberta: u depende apenas de r



Problemas: imprecisões, ruído, variações de parâmetros.

Configurações em malha fechada

- Realimentação Unitária

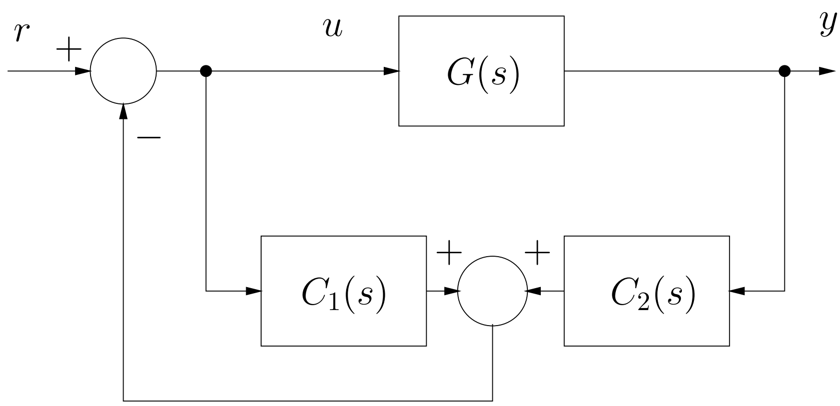


O ganho constante p e o compensador $C(s)$ devem ser projetados.

$$U(s) = C(s)\,[pR(s) - Y(s)]$$

O sinal de atuação u é gerado a partir da saída y e da referência r (um grau de liberdade)

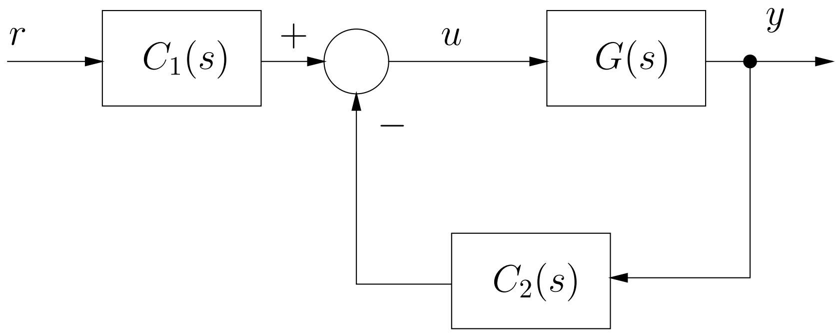
- Conexão realimentação de estado — estimador de estado



$$U(s) = \frac{1}{1 + C_1(s)} R(s) - \frac{C_2(s)}{1 + C_1(s)} Y(s)$$

y e r excitam dois compensadores distintos para gerar u (dois graus de liberdade)

• Configuração “dois graus de liberdade” (geral)



$$U(s) = C_1(s)R(s) - C_2(s)Y(s)$$

r excita $C_1(s)$ e y excita $C_2(s)$

Projeto de Compensadores: hipóteses e definições

• plantas estritamente próprias

• $G(s)$ $p \times q$ tem rank completo ou, equivalentemente, se (A, B, C) é uma realização mínima de $G(s)$, B tem rank completo de colunas e C tem rank completo de linhas.

• $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$ é tal que $N(s)$ e $D(s)$ são coprimos (não têm fatores comuns).

$\Longrightarrow$ Toda raiz de $D(s)$ é um pólo de $G(s)$ e toda raiz de $N(s)$ é um zero de $G(s)$.

Um pólo estável tem parte real negativa. Um zero com parte real negativa é chamado zero de fase mínima.

Teorema (Realização Mínima)

Uma equação de estado (A, b, c, d) é uma realização mínima de uma função de transferência racional própria $G(s)$ se e somente se (A, b) é controlável e (A, c) é observável ou, se e somente se

$$\dim A = \text{grau } G(s)$$

Prova: (Necessidade) Se (A, b) não é controlável e/ou se (A, c) não é observável, a equação de estado pode ser reduzida a uma equação de dimensão menor com a mesma função de transferência.

(Suficiência) Considere o sistema n dimensional controlável e observável

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du \end{aligned}$$

As matrizes de controlabilidade e de observabilidade têm rank n

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathfrak{O} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Por contradição, suponha que existe a realização de $G(s)$ $\bar{n}$ dimensional com $\bar{n} < n$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{b}u \\ y &= \bar{c}\bar{x} + \bar{d}u \end{aligned}$$

Então (teorema): $d = \bar{d}$ e $cA^m b = \bar{c}\bar{A}^m\bar{b}$ para $m = 0, 1, 2, \ldots$

Considere o produto $\mathfrak{O}\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} cb & cAb & cA^2b & \cdots & cA^{n-1}b \\ cAb & cA^2b & cA^3b & \cdots & cA^nb \\ cA^2b & cA^3b & cA^4b & \cdots & cA^{n+1}b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{n-1}b & cA^nb & cA^{n+1}b & \cdots & cA^{2(n+1)}b \end{bmatrix}$$

Trocando todos os termos cA^mb por $\bar{c}\bar{A}^m\bar{b}$

$$\mathfrak{O}\mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{O}}_n\bar{\mathfrak{C}}_n$$

Como $\rho(\mathfrak{O}) = \rho(\mathfrak{C}) = n$, $\rho(\mathfrak{O}\mathfrak{C}) = n$. Por outro lado, o rank de $\bar{\mathfrak{O}}_n$ e de $\bar{\mathfrak{C}}_n$ é no máximo $\bar{n}$, o que contradiz o fato

$$\rho(\mathfrak{O}\mathfrak{C}) = \rho(\bar{\mathfrak{O}}_n\bar{\mathfrak{C}}_n) = n$$

e estabelece a primeira parte do teorema: a realização (A, b, c, d) é mínima se e somente se (A, b) é controlável e (A, c) é observável.

Prova: (segunda parte) Uma realização é controlável e observável se e somente se $G(s) = N(s)/D(s)$ é uma fração coprima, e nesse caso dim A = grau $D(s)$ = grau $G(s)$. Como as realizações mínimas são equivalentes (teorema a seguir) toda realização é mínima se e somente se dim A = grau $G(s)$.

Teorema: todas as realizações mínimas são equivalentes.

Prova: Sejam (A, b, c, d) e $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ duas realizações mínimas de $G(s)$. Então, $d = \bar{d}$ e

$$\mathfrak{O}\mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{O}}\bar{\mathfrak{C}}$$

Usando o fato $cA^m b = \bar{c}\bar{A}^m\bar{b}$, pode-se mostrar que

$$\mathfrak{O}A\mathfrak{C} = \bar{\mathfrak{O}}\bar{A}\bar{\mathfrak{C}}$$

Definindo $P \triangleq \bar{\mathfrak{O}}^{-1}\mathfrak{O}$, tem-se

$$P = \bar{\mathfrak{O}}^{-1}\mathfrak{O} = \bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}^{-1} \quad ; \quad P^{-1} = \mathfrak{O}^{-1}\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1}$$

Portanto,

$$\bar{\mathfrak{C}} = \bar{\mathfrak{O}}^{-1}\mathfrak{O}\mathfrak{C} = P\mathfrak{C}$$

Das primeiras colunas da igualdade acima, tem-se $\bar{b} = Pb$. Por outro lado,

$$\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1} = \mathfrak{O}P^{-1}$$

e das primeiras linhas, tem-se $\bar{c} = cP^{-1}$. Além disso,

$$\bar{A} = \bar{\mathfrak{O}}^{-1}\mathfrak{O}A\mathfrak{C}\bar{\mathfrak{C}}^{-1} = PAP^{-1}$$

e portanto (A, b, c, d) e $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ são equivalentes.

• Computando-se a função de transferência e o seu grau, pode-se determinar a minimalidade de uma dada equação de estado (alternativa à verificação de controlabilidade e observabilidade).

Considere a função de transferência $G(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$

Se os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ são coprimos (não têm fatores comuns), toda raiz de $D(s)$ é pólo de $G(s)$ e vice-versa.

Seja (A, b, c, d) uma realização mínima. Então

$$\frac{N(s)}{D(s)} = c\ (s\mathbf{I} - A)^{-1}b + d = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - A)}c\ [\mathrm{Adj}\ (s\mathbf{I} - A)]b + d$$

Se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos, então grau $D(s)$ = grau $G(s)$ = dimensão de A. Portanto

$$D(s) = k \det(s\mathbf{I} - A)$$

para algum k constante, e $k = 1$ se $D(s)$ é mônico.

$\Longrightarrow$ Se uma equação de estado é controlável e observável, todo autovalor de A é pólo de $G(s)$ e vice-versa.

$\Longrightarrow$ Se (A, b, c, d) é controlável e observável, a estabilidade assintótica implica em BIBO estabilidade e vice-versa.

Equações de estado controláveis e observáveis e frações coprimas contêm essencialmente a mesma informação sobre um sistema linear, podendo ser usadas indistintamente para análise e projeto.

Cômputo de frações coprimas

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Uma alternativa: Matlab (`roots` ou `minreal`)

• Outro método (pode ser estendido para o caso matricial): considere grau $N(s) \leq$ grau $D(s) = n = 4$ e suponha

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\bar{N}(s)}{\bar{D}(s)}$$

e portanto

$$D(s)(-\bar{N}(s)) + N(s)\bar{D}(s) = 0$$

• $D(s)$ e $N(s)$ não são coprimos se e somente se existirem polinômios $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$ com grau $\bar{N}(s) \leq$ grau $\bar{D}(s) < n = 4$ satisfazendo a expressão acima.

A condição grau $\bar{D}(s) < n$ é crucial; do contrário, haveria infinitas soluções $\bar{N}(s) = N(s)R(s)$ e $\bar{D}(s) = D(s)R(s)$ para qualquer polinômio $R(s)$.

Portanto, a análise se dois polinômios são ou não coprimos pode ser reduzida ao estudo da identidade acima.

Considere $D(s)(-\bar{N}(s)) + N(s)\bar{D}(s) = 0$, $D_4 \neq 0$ e

$$D(s) = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + D_3 s^3 + D_4 s^4$$

$$N(s) = N_0 + N_1 s + N_2 s^2 + N_3 s^3 + N_4 s^4$$

$$\bar{D}(s) = \bar{D}_0 + \bar{D}_1 s + \bar{D}_2 s^2 + \bar{D}_3 s^3$$

$$\bar{N}(s) = \bar{N}_0 + \bar{N}_1 s + \bar{N}_2 s^2 + \bar{N}_3 s^3$$

Substituindo e igualando a zero os coeficientes associados com s^k, $k = 0, 1, \ldots, 7$, tem-se

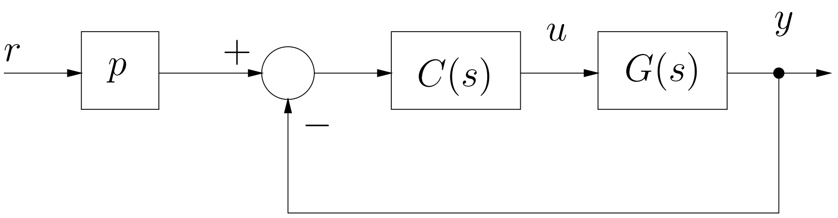
$$\mathcal{S}v = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} D_0 & N_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & D_0 & N_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & N_2 & D_1 & N_1 & D_0 & N_0 & 0 & 0 \\ D_3 & N_3 & D_2 & N_2 & D_1 & N_1 & D_0 & N_0 \\ D_4 & N_4 & D_3 & N_3 & D_2 & N_2 & D_1 & N_1 \\ 0 & 0 & D_4 & N_4 & D_3 & N_3 & D_2 & N_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 & N_4 & D_3 & N_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_4 & N_4 \end{array}\right] \begin{bmatrix} -\bar{N}_0 \\ \bar{D}_0 \\ -\bar{N}_1 \\ \bar{D}_1 \\ -\bar{N}_2 \\ \bar{D}_2 \\ -\bar{N}_3 \\ \bar{D}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Equação algébrica linear homogênea $Sv = 0$; $\mathcal{S}$ é uma matriz quadrada de ordem $2n = 8$ (matriz de Sylvester ou resultante de Sylvester).

- Se $\det(\mathcal{S}) = 0$, existe solução v não nula, e portanto existem polinômios $\bar{N}(s)$ e $\bar{D}(s)$ com grau 3 ou menor satisfazendo a relação acima.

$\Longrightarrow D(s)$ e $N(s)$ são coprimos se e somente se $\det(\mathcal{S}) \neq 0$.

Considere a configuração de realimentação unitária



$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Função de transferência de r para y

$$G_o(s) = \frac{pC(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} = \frac{p\dfrac{B(s)}{A(s)}\dfrac{N(s)}{D(s)}}{1 + \dfrac{B(s)}{A(s)}\dfrac{N(s)}{D(s)}} = \frac{pB(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

Equação do Compensador: $A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s)$

Teorema: Dados $D(s)$ e $N(s)$, soluções $A(s)$ e $B(s)$ existem para qualquer $F(s)$ se e somente se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos.

Se $D(s)$ e $N(s)$ não são coprimos, então existe um fator comum, por exemplo $s+a$. Se $F(s)$ não contém o fator $s+a$, não existe solução.

Se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos, então existem polinômios $\bar{A}(s)$ e $\bar{B}(s)$ tais que $\bar{A}(s)D(s) + \bar{B}(s)N(s) = 1$ (identidade de Bezout). Os polinômios $\bar{A}(s)$ e $\bar{B}(s)$ podem ser obtidos por divisão (algoritmo Euclidiano).

Para qualquer $F(s)$, tem-se

$$F(s)\bar{A}(s)D(s) + F(s)\bar{B}(s)N(s) = F(s)$$

e portanto $A(s) = F(s)\bar{A}(s)$ e $B(s) = F(s)\bar{B}(s)$ são soluções para a equação do compensador.

Soluções gerais

Para quaisquer $D(s)$ e $N(s)$, existem $\hat{A}(s)$ e $\hat{B}(s)$ tais que

$$\hat{A}(s)D(s) + \hat{B}(s)N(s) = 0$$

como por exemplo $\hat{A}(s) = -N(s)$ e $\hat{B}(s) = D(s)$. Assim, para qualquer polinômio $Q(s)$,

$$A(s) = \bar{A}(s)F(s) + Q(s)\hat{A}(s) \quad ; \quad B(s) = \bar{B}(s)F(s) + Q(s)\hat{B}(s)$$

são soluções gerais para a equação do compensador.

Exemplo:

Dados $D(s) = s^2 - 1$, $N(s) = s - 2$ e $F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$, então da identidade de Bezout tem-se

$$-\frac{1}{3}(s^2 - 1) + \frac{1}{3}(s + 2)(s - 2) = 1$$

e portanto

$$A(s) = \frac{1}{3}(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + Q(s)(-s + 2)$$

$$B(s) = -\frac{1}{3}(s + 2)(s^3 + 4s^2 + 6s + 4) + Q(s)(s^2 - 1)$$

são soluções gerais para a equação do compensador.

Soluções podem não ser convenientes (ordem elevada) para projeto. Escolha de $Q(s) = (s^2 + 6s + 15)/3$, tem-se

$$A(s) = s + \frac{34}{3} \quad ; \quad B(s) = \frac{-22s - 23}{3}$$

Alocação de pólos

Dado um conjunto de pólos para o sistema em malha fechada (a realimentação não afeta os zeros do sistema original), pode-se formar o polinômio $F(s)$ e obter a equação do compensador:

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = F(s)$$

Considere grau $N(s) <$ grau $D(s) = n$ e grau $B(s) \leq$ grau $A(s) = m$; então, $F(s)$ tem grau no máximo igual a $n + m$. Escrevendo os polinômios (coeficientes reais não necessariamente diferentes de zero):

$$D(s) = D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \cdots + D_n s^n \quad ; \quad D_n \neq 0$$

$$N(s) = N_0 + N_1 s + N_2 s^2 + \cdots + N_n s^n$$

$$A(s) = A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \cdots + A_m s^m$$

$$B(s) = B_0 + B_1 s + B_2 s^2 + \cdots + B_m s^m$$

$$F(s) = F_0 + F_1 s + F_2 s^2 + \cdots + F_{n+m} s^{n+m}$$

Igualando os coeficientes (sistema de $(n + m + 1)$ equações):

$$A_0 D_0 + B_0 N_0 = F_0$$

$$A_0 D_1 + B_0 N_1 + A_1 D_0 + B_1 N_0 = F_1$$

$$\vdots$$

$$A_m D_n + B_m N_n = F_{n+m}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} A_0 & B_0 & A_1 & B_1 & \cdots & A_m & B_m \end{array} \right] \mathcal{S}_m = \left[\begin{array}{ccccc} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n+m} \end{array} \right]$$

Com $\mathcal{S}_m$ dada por:

$$\mathcal{S}_m = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & \cdots & D_n & 0 & \cdots & 0 \\ N_0 & N_1 & \cdots & N_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_0 & \cdots & D_{n-1} & D_n & \cdots & 0 \\ 0 & N_0 & \cdots & N_{n-1} & N_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D_0 & \cdots & D_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & N_0 & \cdots & N_n \end{bmatrix}$$

• $2(m+1)$ linhas, $n+1+m$ colunas. A equação tem solução para $F(s)$ arbitrário se e somente se $\mathcal{S}_m$ tiver rank completo de colunas.

Condição necessária: $2(m+1) \geq n+m+1$, ou $m \geq n-1$.

Note que se $m < n-1$, o rank de colunas de $\mathcal{S}_m$ não é completo e soluções podem ou não existir para um dado $F(s)$, mas não para um $F(s)$ qualquer.

• Se $m = n-1$, $\mathcal{S}_{n-1}$ é uma matriz quadrada (transposta da matriz de Sylvester) de ordem $2n$, não singular se e somente se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos. Portanto, se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos, rank $(\mathcal{S}_{n-1})$ $= 2n$ (rank completo de colunas).

• Se m aumenta de 1, tem-se uma coluna a mais e duas novas linhas; como $D_n \neq 0$, a nova coluna D é LI das anteriores e a nova matriz $\mathcal{S}_n$ $2(n+1) \times (2n+1)$ tem rank completo de colunas. Repetindo o argumento, tem-se que se $D(s)$ e $N(s)$ são coprimos e $m \geq n-1$, então a matriz $\mathcal{S}_m$ tem rank completo de colunas.

Teorema

Considere um sistema descrito por uma função de transferência $G(s) = N(s)/D(s)$ estritamente própria com $D(s)$ (de grau n) e $N(s)$ coprimos. Seja $m \geq n-1$. Então, para um polinômio qualquer $F(s)$ existe um compensador próprio $C(s) = B(s)/A(s)$ de grau m tal que a função do sistema em malha fechada é dada por

$$G_o(s) = \frac{pB(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)} = \frac{pB(s)N(s)}{F(s)}$$

A existência de uma solução em termos dos coeficientes dos polinômios $A(s)$ e $B(s)$ está garantida pelo fato de $\mathcal{S}_m$ ter rank completo de colunas ($m \geq n-1$). Resta mostrar que $B(s)/A(s)$ é própria (ou, equivalentemente, que $A_m \neq 0$).

Se $N(s)/D(s)$ é estritamente própria, então $N_n = 0$ e das equações tem-se:

$$A_m D_n + B_m N_n = D_n A_m = F_{n+m}$$

Como $F(s)$ tem grau $m+n$, $F_{n+m} \neq 0$ e portanto $A_m \neq 0$, o que completa a prova do teorema.

Note que se $m = n-1$, o compensador é único. Se $m > n-1$, o compensador não é único, e parâmetros livres podem ser usados para satisfazer outras especificações de desempenho.

Regulação $(r = 0)$

• Para a qualquer condição inicial, o compensador $C(s)$ deve garantir que a resposta vai para zero segundo uma certa taxa.

⇒ pólos com parte real negativa ($p = 1$, feedforward não necessário)

Rastreamento

• Para r igual a um degrau de magnitude a, $R(s) = a/s$, e

$$Y(s) = G_o(s)R(s) = G_o(s)\frac{a}{s}$$

Se $G_o(s)$ é BIBO estável, a saída vai para $G_o(0)a$, pois (teorema do valor final):

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = G_o(0)a$$

Para o rastreamento assintótico de um sinal de referência igual a um degrau de magnitude a, $G_o(s)$ precisa ser BIBO estável e $G_o(0) = 1$.

$$G_o(0) = p\frac{N(0)B(0)}{F(0)} = p\frac{B_0N_0}{F_0} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{F_0}{B_0N_0}$$

Portanto, obrigatoriamente $B_0 \neq 0$ (coeficiente do compensador) e $N_0 \neq 0$ (o sistema não pode ter zeros em $s = 0$).

Para o rastreamento de $r(t) = at, \geq 0$, (rampa): BIBO estabilidade, $G_o(0) = 1$ e $G_o'(0) = 0$.

Exemplo

Encontre $C(s)$ próprio e um ganho p para que a saída y rastreie assintoticamente qualquer entrada do tipo degrau.

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s^2-1)} \qquad \rightsquigarrow \text{ grau } 2$$

Escolhendo os pólos: -2, $-1 \pm j$, tem-se $F(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

Equação do compensador

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 & A_1 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: $A_1 = 1$, $A_0 = 34/3$, $B_1 = -22/3$, $B_0 = -23/3$

$$C(s) = \frac{-22s - 23}{3s + 34}$$

Para regulação: $p = 1$

Para rastreamento assintótico, como $N_0 \neq 0$, p é dado por

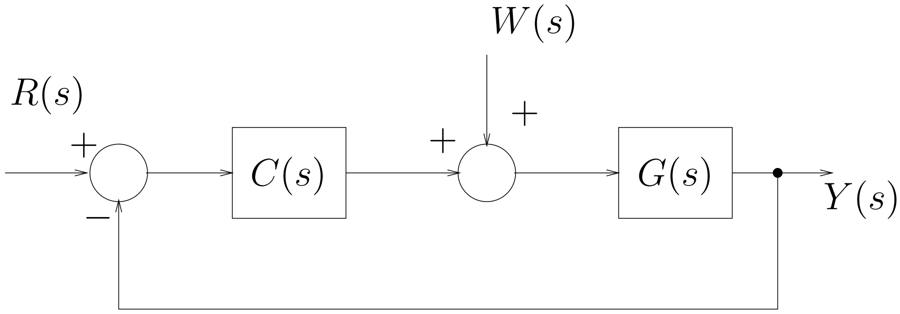
$$p = \frac{F_0}{B_0 N_0} = \frac{6}{23}$$

Função de transferência em malha fechada:

$$G_o(s) = \frac{-2(22s+23)(s-2)}{23(s^3+4s^2+6s+4)}$$

$\Rightarrow$ rastreamento é sensível a variações de parâmetros (não robusto).

Rejeição de Distúrbios e Rastreamento Robusto



Problema: rastrear o sinal $r(t)$ na presença do distúrbio $w(t)$

Se $r(t)$ e $w(t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$ e o sistema é assintoticamente estável, o objetivo é atingido.

Supondo

$$R(s) = \frac{N_r(s)}{D_r(s)} \qquad , \qquad W(s) = \frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

$D_r(s)$, $D_w(s)$ conhecidos

$N_r(s)$, $N_w(s)$ arbitrários mas com $R(s)$ e $W(s)$ próprias

• partes de $r(t)$ e $w(t)$ que tendem a zero, quando $t \to \infty$, não têm efeito sobre $y(t)$ quando $t \to \infty$

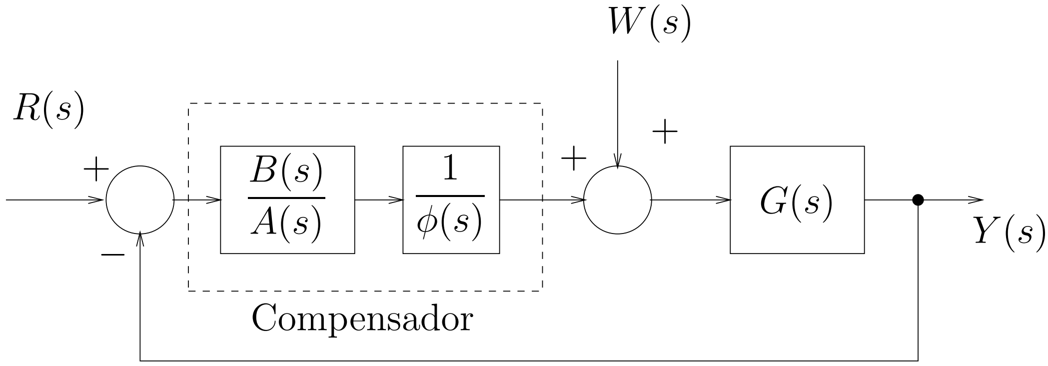
• algumas raízes de $D_r(s)$, $D_w(s)$ têm parte real nula ou positiva.

Teorema

Seja $\phi(s)$ o menor denominador comum de $R(s)$ e de $W(s)$ (considerando apenas os pólos instáveis). Se nenhuma raiz de $\phi(s)$ for um zero de $G(s)$, então existe um compensador próprio tal que o sistema em malha fechada rastreie $r(t)$ e rejeite a perturbação $w(t)$, assintoticamente e de maneira robusta.

Prova: Se nenhuma raiz de $\phi(s)$ é zero de $G(s) = N(s)/D(s)$, então $D(s)\phi(s)$ e $N(s)$ são coprimos. Portanto, existe um compensador próprio $B(s)/A(s)$ tal que o polinômio $F(s)$ tenha as raízes na posição desejada (equação do compensador):

$$A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s) = F(s)$$



Compensador: $C(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)\phi(s)}$

Computando a função de transferência de w para y

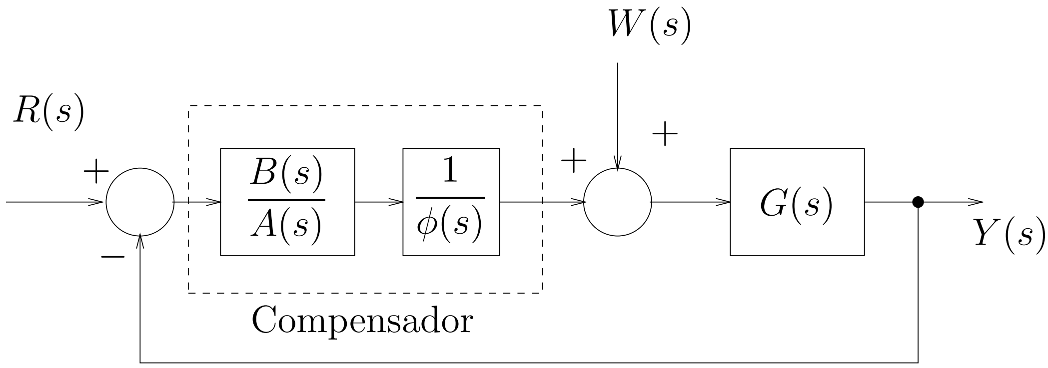
$$G_{yw}(s) = \frac{N(s)/D(s)}{1 + (B(s)/A(s)\phi(s))\,(N(s)/D(s))}$$

$$= \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)} = \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{F(s)}$$

A saída devido à entrada w é dada por

$$Y_w(s) = G_{yw}(s)W(s) = \frac{N(s)A(s)\phi(s)}{F(s)}\frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

Como todas as raízes instáveis de $D_w(s)$ são canceladas por $\phi(s)$, todos os pólos de $Y_w(s)$ têm parte real negativa, e $y_w(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.



De maneira análoga, computando a saída $Y_r(s)$

$$Y_r(s) = G_{yr}(s)R(s) = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s)\phi(s) + B(s)N(s)}R(s)$$

Em termos do erro e:

$$E(s) \triangleq R(s) - Y_r(s) = (1 - G_{yr}(s))R(s) = \frac{A(s)D(s)\phi(s)}{F(s)}\frac{N_r(s)}{D_r(s)}$$

Termos instáveis de $D_r(s)$ são cancelados, e $r(t) - y_r(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Por linearidade, $y(t) = y_w(t) + y_r(t)$ e portanto $r(t) - y(t) \to 0$ quando $t \to \infty$.

• Note que o rastreamento assintótico e a rejeição de distúrbios são assegurados pelo cancelamento da parte instável comum em $D_w(s)$ e $D_r(s)$ com $\phi(t)$, mas não há cancelamentos de pólos e zeros instáveis na alocação dos pólos de malha fechada.

• Mesmo para variações de parâmetros em $D(s)$, $N(s)$, $A(s)$ e $B(s)$ (desde que o sistema em malha fechada permaneça BIBO estável) $\Rightarrow$ **Robustez**.

• Princípio do modelo interno.

Exemplo: Projete um controlador que aloque os pólos e garanta o rastreamento assintótico robusto para qualquer entrada em degrau (modelo interno $\phi(s) = s$), para

$$G(s) = \frac{(s-2)}{(s^2-1)}$$

$$A(s)\tilde{D}(s) + B(s)N(s) = F(s) \quad ; \quad \tilde{D}(s) \triangleq D(s)\phi(s) \quad \text{grau } 3$$

$m = 2$, $F(s)$ tem grau 5. Escolhendo os pólos -2, $-2 \pm j$, $-1 \pm 2j$

$$F(s) = s^5 + 8s^4 + 30s^3 + 66s^2 + 85s + 50$$

$$\begin{bmatrix} A_0 & B_0 & A_1 & B_1 & A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 50 & 85 & 66 & 30 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução: $\begin{bmatrix} 127.3 & -25 & 8 & -118.7 & 1 & -96.3 \end{bmatrix}$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{-96.3s^2 - 118.7s - 25}{s^2 + 8s + 127.3}$$

$$C(s) = \frac{B(s)}{A(s)\phi(s)} = \frac{-96.3s^2 - 118.7s - 25}{(s^2 + 8s + 127.3)s}$$