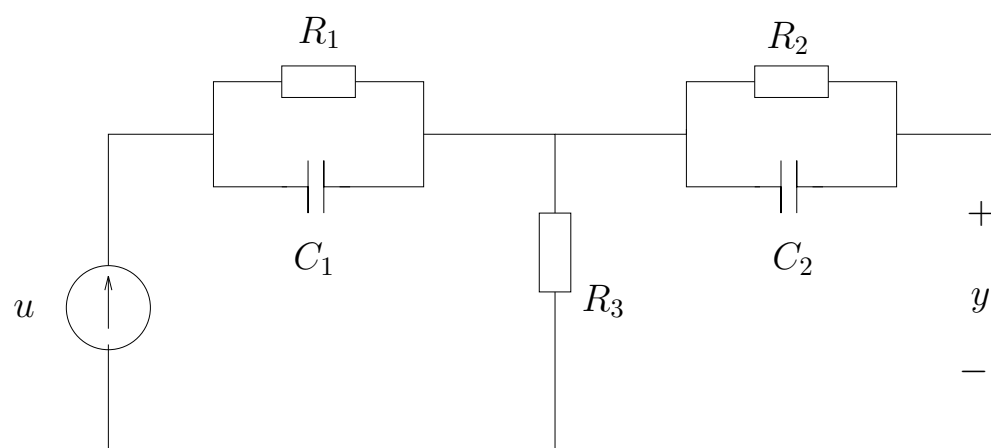


Controlabilidade e Observabilidade



- A tensão no capacitor C_2 não pode ser controlada pela entrada u ;
- A tensão no capacitor C_1 pode ser controlada pela entrada u ;
- A tensão no capacitor C_2 pode ser observada pela saída y ;
- A tensão no capacitor C_1 não pode ser observada pela saída y .

Considere a equação dinâmica de dimensão n e p entradas

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

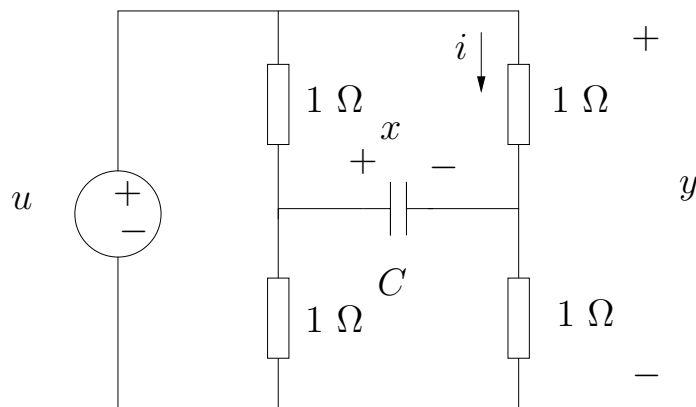
com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

- A equação de saída não influencia a controlabilidade

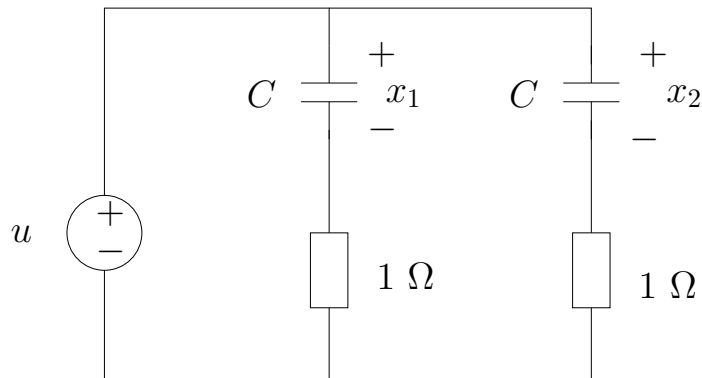
A equação de estado acima ou o par (A, B) é **controlável** se para qualquer estado inicial $x(0) = x_0$ e para qualquer estado final x_1 existir uma entrada $u(t)$ que transfere o estado de x_0 para x_1 em tempo finito.

- A definição requer apenas que se possa mover qualquer estado inicial no espaço de estados para qualquer estado final em tempo finito. Não há restrições quanto à trajetória a ser seguida nem quanto à magnitude da entrada.

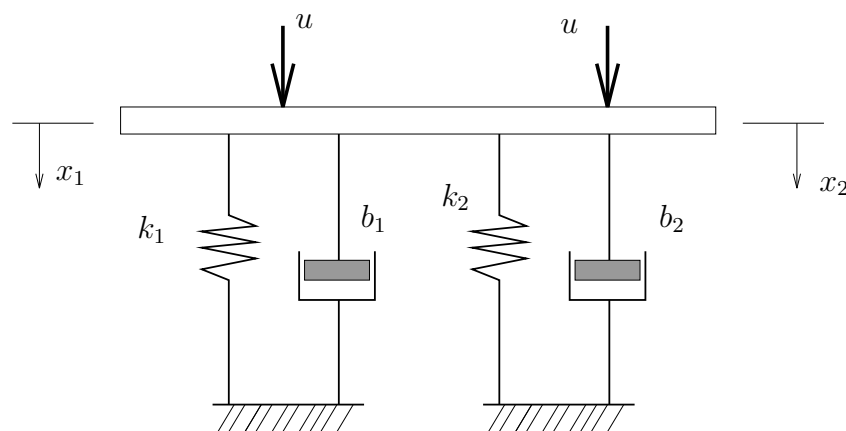
Exemplo:



A variável de estado x é a tensão no capacitor. Se $x(0) = 0$, então $x(t) = 0$, para todo $t \geq 0$ independentemente da entrada u que for aplicada, e o sistema não é controlável.

Exemplo:

- O circuito acima tem duas variáveis de estado, x_1 e x_2 . Através da entrada $u(t)$, pode-se levar $x_1(t)$ ou $x_2(t)$ a qualquer estado arbitrário.
- No entanto, não é possível levar x_1 e x_2 a qualquer estado. Por exemplo, se $x_1(0)$ e $x_2(0)$ são iguais, independentemente da entrada u que for aplicada tem-se $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \geq 0$.
- O circuito é não controlável.

Exemplo

- Controlável ou não controlável?

Teorema: as afirmações abaixo são equivalentes.

1) O par (A, B) é controlável.

2) A matriz $n \times n$

$$\begin{aligned} W_c(t) &\triangleq \int_0^t \exp(A\tau)BB' \exp(A'\tau)d\tau = \\ &= \int_0^t \exp[A(t-\tau)]BB' \exp[A'(t-\tau)]d\tau \end{aligned}$$

é não-singular $\forall t > 0$.

3) A matriz de controlabilidade $n \times np$

$$\mathfrak{C} = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

tem rank n (rank completo de linhas).

4) Para todo λ autovalor de A (e conseqüentemente, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$), a matriz complexa $n \times (n+p)$

$$[\lambda \mathbf{I} - A \mid B]$$

tem rank n (rank completo de linhas), implicando que $(s\mathbf{I} - A)$ e B são coprimas à esquerda.

5) Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, a solução única de

$$AW_c + W_cA' = -BB'$$

é definida positiva. Essa solução é chamada de **Gramiano de controlabilidade** e pode ser expressa como

$$W_c = \int_0^\infty \exp(A\tau)BB' \exp(A'\tau)d\tau$$

Prova

1) \Leftrightarrow 2). Primeiramente a equivalência entre as duas formas integrais que aparecem em **2)** pode ser provada fazendo-se a mudança de variável $\alpha = t - \tau$. O integrando garante que a matriz $W_c(t)$ é sempre semidefinida positiva; será definida positiva se e somente se for não singular.

- Se $W_c(t)$ for não singular, então (A, B) é controlável.

A resposta no instante t_1 é dada por

$$x(t_1) = \exp(At_1)x(0) + \int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)]Bu(\tau)d\tau$$

Para qualquer $x(0) = x_0$ e qualquer $x(t_1) = x_1$, a entrada

$$u(t) = -B' \exp[A'(t_1 - t)]W_c^{-1}(t_1)[\exp(At_1)x_0 - x_1]$$

leva o estado de x_0 a x_1 no tempo t_1 . De fato, substituindo

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \exp(At_1)x(0) - \left(\int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)]B \cdot \right. \\ &\quad \left. B' \exp[A'(t_1 - \tau)]d\tau \right) W_c^{-1}(t_1)[\exp(At_1)x_0 - x_1] = \\ &= \exp(At_1)x(0) - W_c(t_1)W_c^{-1}(t_1)[\exp(At_1)x_0 - x_1] = x_1 \end{aligned}$$

o que mostra que se W_c é não singular então (A, B) é controlável.

• Para mostrar o inverso, supõe-se por absurdo que o par é controlável mas $W_c(t_1)$ não é definida positiva para algum t_1 . Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que

$$\begin{aligned} v'W_c(t_1)v &= \int_0^{t_1} v' \exp[A(t_1 - \tau)]BB' \exp[A'(t_1 - \tau)]v d\tau \\ &= \int_0^{t_1} \|B' \exp[A'(t_1 - \tau)]v\|^2 d\tau = 0 \end{aligned}$$

$$\implies B' \exp[A'(t_1 - \tau)]v \equiv 0 \quad \text{ou} \quad v' \exp[A(t_1 - \tau)]B \equiv 0$$

para todo $\tau \in [0, t_1]$. Por outro lado, se o sistema é controlável, existe uma entrada que transfere o estado inicial de $x(0) = \exp(-At_1)v$ para $x(t_1) = 0$. Utilizando a expressão geral de $x(t)$ para esse caso tem-se

$$x(t_1) = 0 = v + \int_0^{t_1} \exp[A(t_1 - \tau)]Bu(\tau)d\tau$$

Pré-multiplicando por v'

$$0 = v'v + \int_0^{t_1} v' \exp[A(t_1 - \tau)]Bu(\tau)d\tau = \|v\|^2 + 0$$

o que contradiz a hipótese $v \neq 0$. A equivalência entre **1)** e **2)** está estabelecida.

2) \Leftrightarrow 3). Como todo elemento de $\exp(At)B$ é uma função analítica em t , se $W_c(t)$ for não singular para algum t então é não singular para todo t . Como as duas formas integrais em **2)** são equivalentes, $W_c(t)$ é não singular se e somente se não existe $v \neq 0$ tal que

$$v' \exp(At)B = 0 \quad \text{para todo } t$$

- Se $W_c(t)$ é não singular, então a matriz de controlabilidade \mathfrak{C} tem rank completo de linhas.

Supondo que \mathfrak{C} não tem rank completo, existe $v \neq 0$ tal que

$$v' \mathfrak{C} = 0$$

ou equivalentemente

$$v' A^k B = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Note que $\exp(At)B$ pode ser expressa como uma combinação linear de $\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ e portanto $v' \exp(At)B = 0$, o que contradiz a hipótese da não singularidade de $W_c(t)$. Portanto **2)** implica **3)**.

- Para mostrar o inverso, supõe-se que \mathfrak{C} tem rank completo de linhas mas $W_c(t)$ é singular. Nesse caso, existe $v \neq 0$ tal que

$$v' \exp(At)B = 0 \quad \text{para todo } t$$

Escolhendo $t = 0$, tem-se $v'B = 0$. Diferenciando e novamente calculando em $t = 0$, tem-se $v'AB = 0$; fazendo essa operação sucessivamente, obtém-se $v'A^k B = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ ou

$$v' [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B] = v' \mathfrak{C} = 0$$

o que contradiz a hipótese de que \mathfrak{C} tem rank completo de linhas e mostra a equivalência entre **2)** e **3)**.

3) \Leftrightarrow 4).

• Se \mathfrak{C} tem rank completo de linhas, então $[\lambda \mathbf{I} - A \mid B]$ tem rank completo de linhas para todo λ autovalor de A . Se não, existe um autovalor λ_1 de A e um vetor $q \neq 0$ tais que

$$q [\lambda_1 \mathbf{I} - A \mid B] = 0$$

e portanto $qA = \lambda_1 q$ e $qB = 0$ (implicando que q é um autovetor à esquerda de A). Calculando

$$qA^2 = (qA)A = (\lambda_1 q)A = \lambda_1^2 q$$

e assim sucessivamente, obtém-se $qA^k = \lambda_1^k q$, e portanto

$$q [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = [qB \ \lambda_1 qB \ \cdots \ \lambda_1^{n-1} qB] = 0$$

o que contradiz a hipótese de que \mathfrak{C} tem rank completo de linhas.

• $\rho(\mathfrak{C}) < n \implies \rho[\lambda \mathbf{I} - A \mid B] < n$ para algum λ autovalor de A .

Dois resultados são necessários:

• A controlabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência;

• Se $\rho(\mathfrak{C}) = n - m$ para algum $m \geq 1$, então existe uma matriz P não singular tal que

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{B} = PB = \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

com $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Seja λ_1 um autovalor de \bar{A}_c associado a $q_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ autovetor à esquerda, ou seja, $q_1 \bar{A}_c = \lambda_1 q_1$. Portanto, $q_1(\bar{A}_c - \lambda_1 \mathbf{I}) = 0$.

Formando o vetor $q \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ $q \triangleq [0 \quad q_1]$, tem-se

$$q \left[\lambda_1 \mathbf{I} - \bar{A} \mid \bar{B} \right] = [0 \quad q_1] \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_1 \mathbf{I} - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} & \bar{B}_c \\ \mathbf{0} & \lambda_1 \mathbf{I} - \bar{A}_c & \mathbf{0} \end{array} \right] = \mathbf{0}$$

o que implica

$$\rho \left[\lambda \mathbf{I} - \bar{A} \mid \bar{B} \right] < n \quad \implies \quad \rho \left[\lambda \mathbf{I} - A \mid B \right] < n$$

para algum autovalor de A (note que para qualquer outro valor de λ , a matriz $\lambda \mathbf{I} - A$ é não singular).

Com isso, a equivalência **3) \Leftrightarrow 4)** está provada.

2) \Leftrightarrow 5).

• Se A é estável, a única solução de

$$AW_c + W_c A' = -BB'$$

pode ser expressa como

$$W_c = \int_0^\infty \exp(A\tau) BB' \exp(A'\tau) d\tau$$

O Gramiano W_c é sempre semidefinido positivo, e será definido positivo se e somente se for não singular.

Isto prova a equivalência **2) \Leftrightarrow 5).**

Exemplo

Considere o problema do carro com o pêndulo invertido, descrito (para pequenas variações em torno do ponto de equilíbrio e para valores escolhidos dos parâmetros) por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] x$$

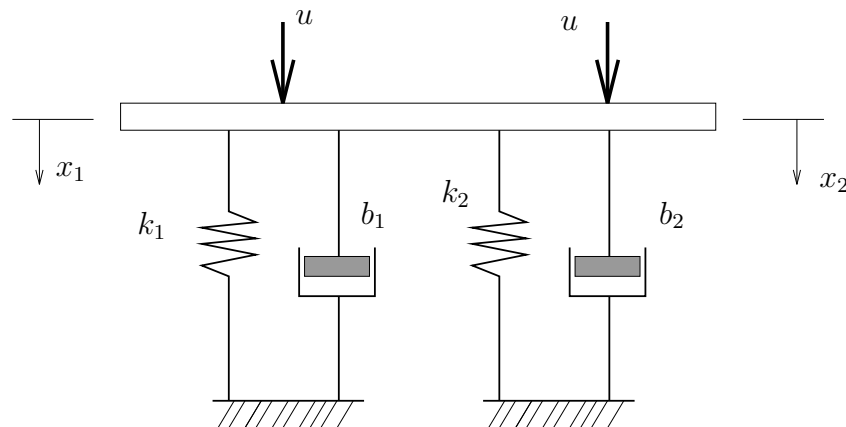
A matriz de controlabilidade é dada por

$$\mathfrak{C} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -10 \\ -2 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rank}(\mathfrak{C}) = 4 \implies$ Sistema controlável

- No Matlab, o comando **ctrb** retorna a matriz de controlabilidade \mathfrak{C} e o comando **gram** retorna o Gramiano de controlabilidade. Com o comando **rank** pode-se determinar se um sistema é controlável ou não.

Exemplo



$$k_1 x_1 + b_1 \dot{x}_1 = u \quad ; \quad k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2 = u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1/b_1 & 0 \\ 0 & -k_2/b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/b_1 \\ 1/b_2 \end{bmatrix} u$$

$$x_1(0) = x_{10} \quad , \quad x_2(0) = x_{20}$$

$$\rho([B \mid AB]) = \rho\left(\left[\begin{array}{c|c} 1/b_1 & -k_1/b_1^2 \\ 1/b_2 & -k_2/b_2^2 \end{array}\right]\right) = n = 2 \quad \text{se} \quad k_1 b_2 \neq k_2 b_1$$

Por exemplo, o sistema não é controlável se $k_1 = k_2$ e $b_1 = b_2$

- Considere $k_1 = k_2 = 1$, $b_1 = 2$ e $b_2 = 1$. Dados $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = -1$, encontre $u(t)$ que leva a plataforma para a posição de repouso em 2 segundos.

- Calculando $W_c(2)$

$$W_c(2) = \int_0^2 \begin{bmatrix} \exp(-0.5\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(-0.5\tau) & 0 \\ 0 & \exp(-\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

$$W_c(2) = \begin{bmatrix} 0.2162 & 0.3167 \\ 0.3167 & 0.4908 \end{bmatrix}$$

$$u_1(t) = - \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp[-0.5(2-t)] & 0 \\ 0 & \exp[-(2-t)] \end{bmatrix} W_c^{-1}(2) \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

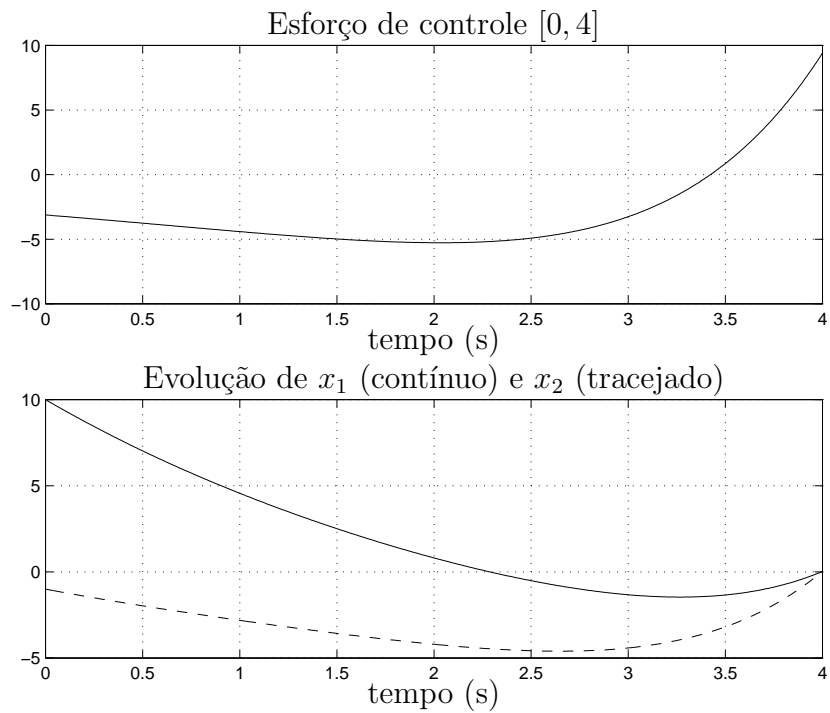
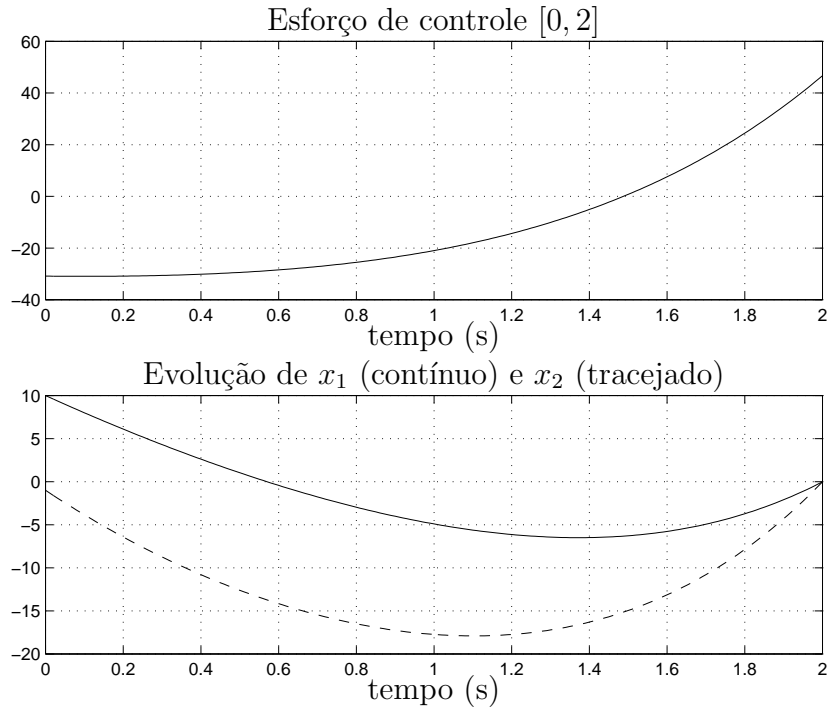
$$u_1(t) = -58.82 \exp(0.5t) + 27.96 \exp(t) \quad , \quad t \in [0, 2]$$

- $u_1(t)$ leva a plataforma da posição inicial ao repouso em 2 segundos;
- o esforço de controle aumenta com a diminuição do tempo de transferência;
- se alguma restrição for imposta sobre u , então pode não ser possível transferir o sistema num intervalo de tempo arbitrariamente pequeno.

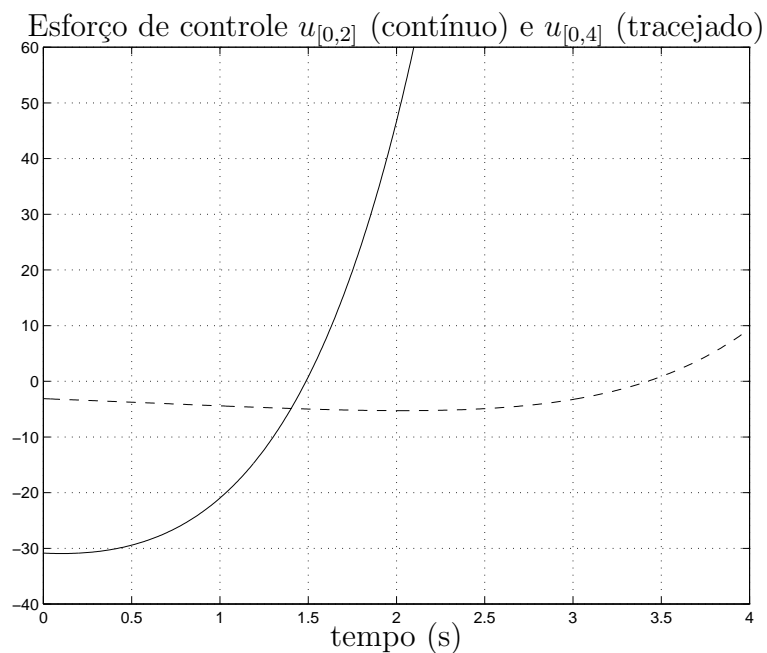
Para levar em 4 segundos:

$$u_2(t) = -3.81 \exp(0.5t) + 0.688 \exp(t) \quad , \quad t \in [0, 4]$$

Fazendo a simulação (comando `lsim` no Matlab)



Comparando os esforços de controle



- A entrada $u(t)$ dada

$$u(t) = -B' \exp[A'(t_1 - t)] W_c^{-1}(t_1) [\exp(At_1)x_0 - x_1]$$

é chamada de **controle de mínima energia** pois para qualquer outro $\bar{u}(t)$ que realiza a mesma tarefa tem-se

$$\int_0^{t_1} \bar{u}'(t) \bar{u}(t) dt \geq \int_0^{t_1} u'(t) u(t) dt$$

Índices de Controlabilidade

Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ com B de rank completo de colunas (se não for o caso, alguma coluna redundante pode ser eliminada).

Se (A, B) for controlável, a matriz de controlabilidade \mathfrak{C} tem rank n e, conseqüentemente, n colunas linearmente independentes (de um total de np colunas).

Seja b_i a i -ésima coluna de B , e portanto

$$\mathfrak{C} = [b_1 \ \cdots \ b_p \mid Ab_1 \ \cdots \ Ab_p \mid \cdots \mid A^{n-1}b_1 \ \cdots \ A^{n-1}b_p]$$

Note que se $A^i b_m$ depende das colunas à esquerda em \mathfrak{C} , então $A^{i+1} b_m$ também depende. Portanto, se uma coluna associada a b_m torna-se linearmente dependente, todas as demais também o serão.

Seja μ_m o número de colunas linearmente independentes associadas a b_m em \mathfrak{C} . Ou seja, as colunas

$$b_m, \quad Ab_m, \quad \dots, \quad A^{\mu_m-1} b_m$$

são LI e $A^{\mu_m+i} b_m$, $i = 0, 1, 2, \dots$ são LD. Assim, se \mathfrak{C} tem rank n ,

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p = n$$

$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ são chamados índices de controlabilidade e

$$\mu = \max \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \}$$

é o **índice de controlabilidade** de (A, B) .

Equivalentemente, se (A, B) é controlável, o índice de controlabilidade μ é o menor inteiro tal que

$$\rho(\mathfrak{C}_\mu) = \rho([B \ AB \ \dots \ A^{\mu-1}B]) = n$$

- Cálculo de um intervalo para μ

Se todos os índices de controlabilidade são iguais ($\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_p$), $n/p \leq \mu$. Se todos, exceto um, são iguais a 1, $\mu = n - (p - 1)$ (maior valor possível).

Seja \bar{n} o grau do polinômio mínimo de A . Então, por definição, existem α_i tais que

$$A^{\bar{n}} = \alpha_1 A^{\bar{n}-1} + \alpha_2 A^{\bar{n}-2} + \dots + \alpha_{\bar{n}} \mathbf{I}$$

e $A^{\bar{n}}B$ pode ser escrito como combinação linear de $\{B, AB, \dots, A^{\bar{n}-1}B\}$.

Como conclusão

$$n/p \leq \mu \leq \min(\bar{n}, n - p + 1) \quad p = \text{rank}(B)$$

Como o grau do polinômio mínimo em geral não é conhecido, e o rank de B pode ser computado facilmente, usa-se o corolário a seguir.

Corolário:

O par (A, B) com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\rho(B) = p$ é controlável se e somente se a matriz

$$\mathfrak{C}_{n-p+1} \triangleq [B \ AB \ \dots \ A^{n-p}B]$$

tiver rank n .

Exemplo

Considere o modelo (parcial) de satélite cujas equações linearizadas são dadas por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Matriz de controlabilidade $\mathfrak{C} \in \mathbb{R}^{n \times np}$ é 4×8 .

Usando o resultado do corolário anterior, pode-se verificar a controlabilidade através do rank da matriz

$$[B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Rank = 4 \implies controlável

Índices de controlabilidade: $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2$

Índice de controlabilidade do par (A, B) : $\mu = 2$

Teorema

A controlabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência.

Prova: considere o par (A, B) e a matriz de controlabilidade

$$\mathfrak{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$$

O par equivalente (\bar{A}, \bar{B}) com $\bar{A} = PAP^{-1}$ e $\bar{B} = PB$ e P uma matriz não singular qualquer possui a matriz de controlabilidade

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{C}} &= [\bar{B} \ \bar{A}\bar{B} \ \bar{A}^2\bar{B} \ \dots \ \bar{A}^{n-1}\bar{B}] \\ &= [PB \ PAP^{-1}PB \ \dots \ PA^{n-1}P^{-1}PB] \\ &= P [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] = P\mathfrak{C} \end{aligned}$$

Como P é não singular, $\rho(\mathfrak{C}) = \rho(\bar{\mathfrak{C}})$.

Teorema

O conjunto de índices de controlabilidade do par (A, B) é invariante sob qualquer transformação de equivalência e para qualquer re-ordenamento das colunas de B .

Prova: Do teorema anterior, definindo

$$\mathfrak{C}_k = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{k-1}B]$$

tem-se $\rho(\mathfrak{C}_k) = \rho(\bar{\mathfrak{C}}_k)$ para $k = 1, 2, \dots$. Qualquer re-arrançamento das colunas pode ser definido como $\hat{B} = BM$ com $M \in \mathbb{R}^{p \times p}$ uma matriz não singular de permutação. Assim,

$$\hat{\mathfrak{C}}_k \triangleq [\hat{B} \ A\hat{B} \ \dots \ A^{k-1}\hat{B}] = \mathfrak{C}_k \text{diag} (M, \dots, M)$$

Como $\text{diag} (M, \dots, M)$ é não singular, $\rho(\hat{\mathfrak{C}}_k) = \rho(\mathfrak{C}_k)$.