Descrição Matemática de Sistemas

• Linearização

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= h(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

O sistema não linear acima pode ser aproximado (sob certas condições) por um sistema linear.

Supondo que para certas condições iniciais e para uma certa entrada $u_0(t)$, a solução do sistema é $x_0(t)$, ou seja

$$\dot{x}_0(t) = h(x_0(t), u_0(t), t)$$

Para alguns sistemas não lineares, se a entrada é ligeiramente perturbada $u_0(t) + \bar{u}(t)$, a solução difere apenas um pouco $x_0(t) + \bar{x}(t)$ com $\bar{x}(t)$ pequeno para todo t.

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) + \dot{\bar{x}}(t) &= h(x_0(t) + \bar{x}(t), u_0(t) + \bar{u}(t), t) = \\ &= h(x_0(t), u_0(t), t) + \frac{\partial h}{\partial x}\bar{x} + \frac{\partial h}{\partial u}\bar{u} + \cdots \end{aligned}$$

Para $h = \left[\begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \end{array}\right]'$, $x = \left[\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\right]'$ e $u = \left[\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}\right]'$

Jacobianos:

$$A(t) \triangleq \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial x_1 & \partial h_1/\partial x_2 & \partial h_1/\partial x_3 \\ \partial h_2/\partial x_1 & \partial h_2/\partial x_2 & \partial h_2/\partial x_3 \\ \partial h_3/\partial x_1 & \partial h_3/\partial x_2 & \partial h_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

$$B(t) \triangleq \frac{\partial h}{\partial u} = \begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u_1 & \partial h_1/\partial u_2 \\ \partial h_2/\partial u_1 & \partial h_2/\partial u_2 \\ \partial h_3/\partial u_1 & \partial h_3/\partial u_2 \end{bmatrix}$$

Sistema Linearizado

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t)$$

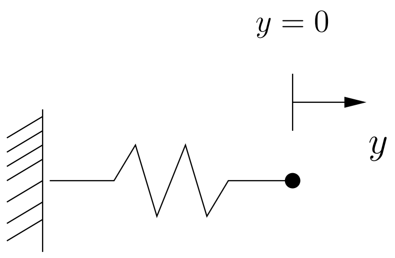
No caso geral, A e B podem ser funções do tempo (computados ao longo das trajetórias de $x_0(t)$ e $u_0(t)$).

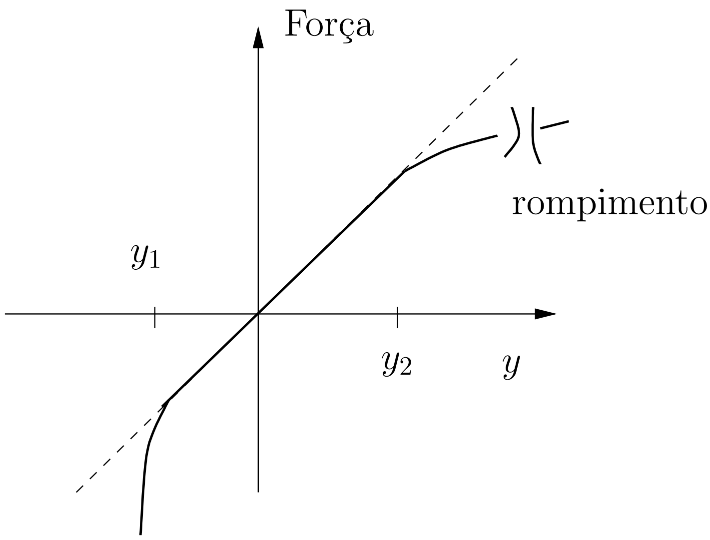
A equação linearizada é obtida desprezando-se as potências maiores de $\bar{x}$ e $\bar{u}$

Procedimento similar pode ser aplicado para $y(t) = f(x(t), u(t), t)$

• A linearização nem sempre se aplica: para alguns sistemas não lineares, uma diferença infinitesimal nas condições iniciais pode gerar soluções completamente diferentes (hipersensibilidade às condições iniciais, caos).

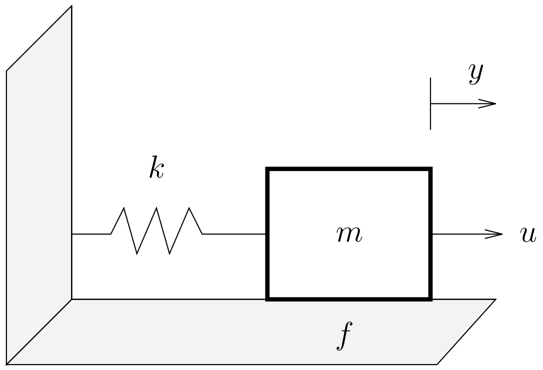
Exemplo: mola





Comportamento linear para deslocamentos no intervalo $[y_1, y_2]$

Exemplo



$$ma = F$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \text{força aplicada} - \text{força de reação da mola}$$
$$- \text{força de reação devido ao atrito}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = u - ky - f\frac{dy}{dt}$$

k : constante da mola

f : coeficiente de atrito viscoso

Descrição Entrada-Saída

$$Y(s) = \frac{1}{ms^2 + fs + k}U(s)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad ; \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms^2 + fs + k}\right]$$

Descrição por Variáveis de Estado

Sejam $x_1 = y$ (posição da massa m) e $x_2 = \dot{y}$ (velocidade da massa m) $\Rightarrow$ Estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -f/m \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = 0$$

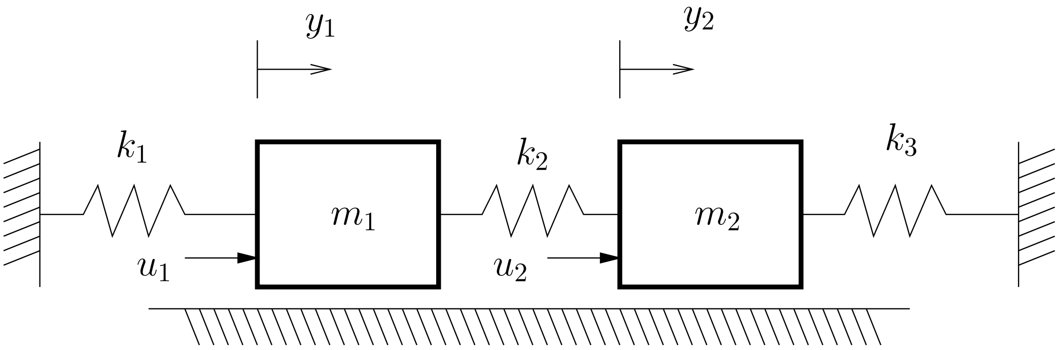
Por exemplo: $m = 1$, $f = 3$, $k = 2$

Resposta ao Impulso: $\quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+3s+2}\right]$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right] = \exp(-t) - \exp(-2t)$$

$$y(t) = \int_0^t \left(\exp[-(t-\tau)] - \exp[-2(t-\tau)]\right) u(\tau) d\tau$$

Sistema Massa-Mola



Assumindo que não há atrito:

$$m_1\ddot{y}_1 = u_1 - k_1 y_1 - k_2(y_1 - y_2)$$

$$m_2\ddot{y}_2 = u_2 - k_3 y_2 - k_2(y_2 - y_1)$$

Escrevendo de maneira combinada:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Definindo: $x_1 \triangleq y_1$, $x_2 \triangleq \dot{y}_1$, $x_3 \triangleq y_2$, $x_4 \triangleq \dot{y}_2$ (equações de estado):

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}'$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1+k_2)/m_1 & 0 & k_2/m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2/m_2 & 0 & -(k_3+k_2)/m_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/m_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Descrição Entrada Saída:

- Aplicando a Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$m_1 s^2 Y_1(s) + k_1 Y_1(s) + k_2(Y_1(s) - Y_2(s)) = U_1(s)$$

$$m_2 s^2 Y_2(s) + k_3 Y_2(s) + k_2(Y_2(s) - Y_1(s)) = U_2(s)$$

Matriz de Transferência:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} m_2 s^2 + k_3 + k_2 & k_2 \\ \\ k_2 & m_1 s^2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

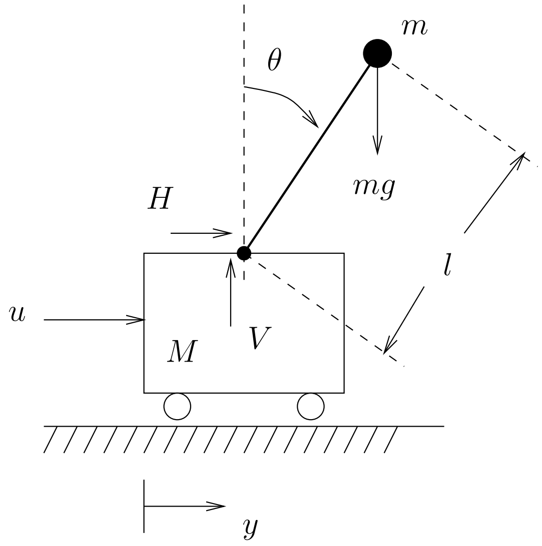
$$d(s) \triangleq (m_1 s^2 + k_1 + k_2)(m_2 s^2 + k_3 + k_2) - k_2^2$$

- Se $k_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ dois sistemas desacoplados (matriz de transferência bloco-diagonal).

$$Y_1(s) = \frac{1}{m_1 s^2 + k_1} U_1(s) \quad ; \quad Y_2(s) = \frac{1}{m_3 s^2 + k_3} U_2(s)$$

- A matriz de transferência pode ser obtida elemento a elemento, fazendo-se inicialmente $U_1(s) = 0$ e depois $U_2(s) = 0$ (princípio da superposição)

Exemplo: Carro com Pêndulo Invertido



Assume-se que o movimento se dá no plano e desprezam-se o atrito e a massa da haste. O objetivo é manter o pêndulo na posição vertical (modelo simplificado do lançamento de um foguete espacial).

H, V : forças horizontal e vertical exercidas pelo carro no pêndulo

Massa M: $$M\frac{d^2y}{dt^2} + H = u$$

Massa m: $$m\frac{d^2}{dt^2}(y + l\sin(\theta)) = H \qquad \text{Horizontal}$$

$$mg = m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos(\theta)) + V \qquad \text{Vertical}$$

$$\Longrightarrow \quad H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad mg - V = -ml\ddot{\theta}\sin\theta - ml\dot{\theta}^2\cos\theta$$

Movimento rotacional da massa m:

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\sin\theta + Vl\sin\theta - Hl\cos\theta$$

• São equações não lineares; no entanto, pode-se assumir que θ e $\dot{\theta}$ são pequenos (pêndulo na posição vertical).

$$\sin\theta \cong \theta \ \ ; \ \ \cos\theta \cong 1 \ \ ; \ \ \theta^2, \dot{\theta}^2, \theta\dot{\theta}, \theta\ddot{\theta} \to 0$$

$$H = m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} \ \ ; \ \ V = mg$$

$$M\ddot{y} = u - m\ddot{y} - ml\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = mgl\theta + mgl\theta - (m\ddot{y} + ml\ddot{\theta})l$$

Re-arranjando:

$$(M+m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u$$

$$2l\ddot{\theta} - 2g\theta + \ddot{y} = 0$$

Transformada de Laplace (condições iniciais nulas):

$$(M+m)s^2Y(s) + mls^2\Theta(s) = U(s)$$

$$(2ls^2 - 2g)\Theta(s) + s^2Y(s) = 0$$

$$G_{yu}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2ls^2 - 2g}{s^2[(2M+m)ls^2 - 2g(M+m)]}$$

$$G_{\theta u}(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-1}{(2M+m)ls^2 - 2g(M+m)}$$

Definindo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$

$$x \triangleq \left[\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\right]'$$

Resolvendo as equações para $\ddot{y}$ e $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{y} = -\frac{2gm}{2M+m}\theta + \frac{2}{2M+m}u$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g(M+m)}{(2M+m)l}\theta - \frac{1}{(2M+m)l}u$$

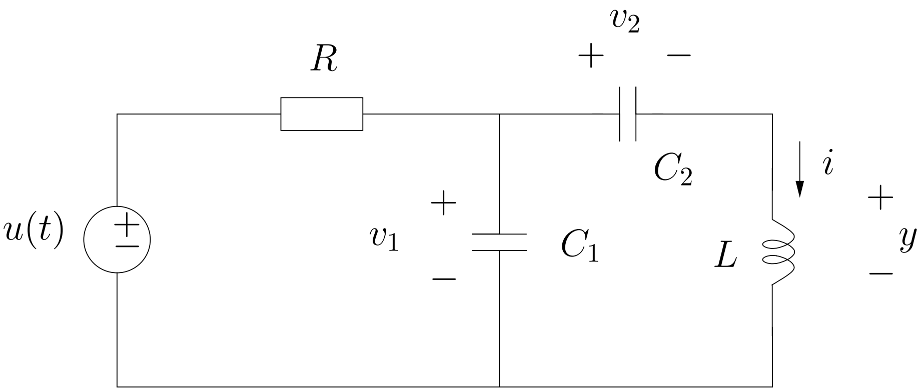
Equações de Estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-2mg}{2M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{2g(M+m)}{(2M+m)l} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{2M+m} \\ 0 \\ \dfrac{-1}{(2M+m)l} \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] x$$

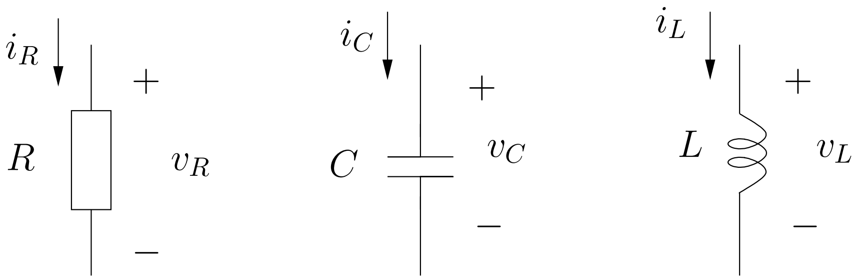
- Livros de análise linear (graduação e pós): outros modelos
- Ênfase do curso: modelos de circuitos elétricos

Exemplo: circuito elétrico



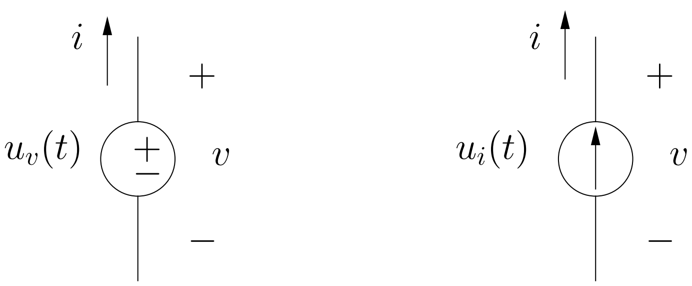
Um bipolo (dispositivo contendo 2 terminais condutores) se caracteriza pela relação tensão-corrente.

Resistor, Capacitor e Indutor lineares (convenção de receptor):



$$v_R = Ri_R \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt} \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Fontes de Tensão e de Corrente (convenção de gerador):



$$v = u_v(t) \qquad i = u_i(t)$$

Convenção Utilizada: em geral, a convenção de receptor é utilizada para os bipolos passivos e a de gerador para as fontes.

Nó: Um ponto de ligação entre 2 ou mais bipolos.

• Lei das Correntes ou 1ª Lei de Kirchhoff: a soma algébrica das correntes que saem de um nó é nula.

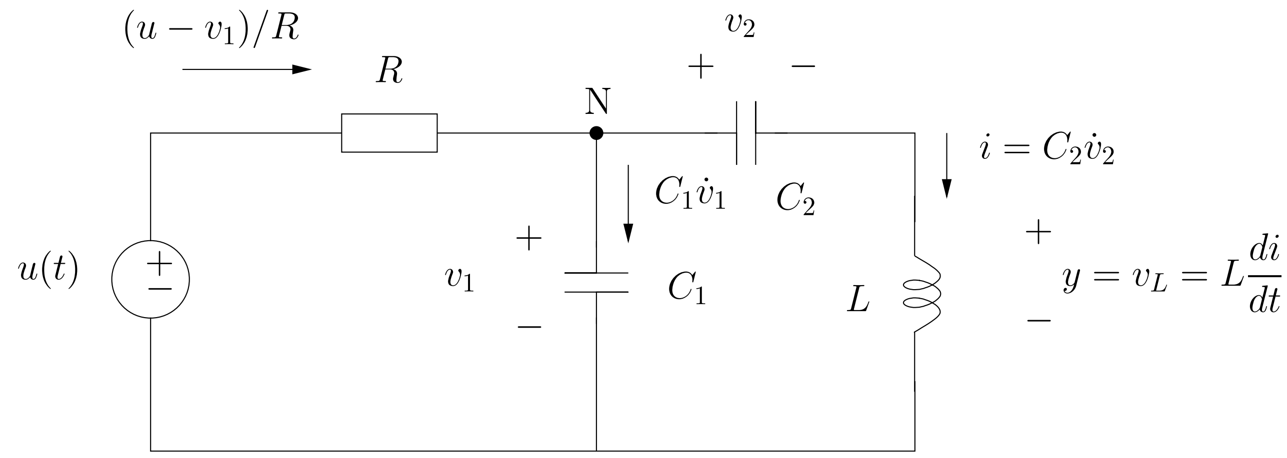
Laço: Qualquer percurso fechado formado por bipolos que não passe duas vezes pelo mesmo nó.

• Lei das Tensões ou 2ª Lei de Kirchhoff: a soma algébrica das tensões nos bipolos pertencentes a um laço é nula.

Em um circuito com b bipolos e n nós tem-se:

$2b$ variáveis (tensões e correntes nos bipolos)
b equações de bipolos
$n-1$ equações de corrente
$b-(n-1)$ equações de tensão.

Circuito:



- Nó N: $\dfrac{u - v_1}{R} = C_1\dot{v}_1 + C_2\dot{v}_2 = C_1\dot{v}_1 + i$
- Laço da direita: $v_1 = v_2 + L\dfrac{di}{dt}$

Definindo $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$ e $x_3 = i$ obtêm-se as equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC_1}x_1 - \frac{1}{C_1}x_3 + \frac{1}{RC}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2}x_3 \quad ; \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{L}(x_1 - x_2)$$

Equação de saída: $y = L\dot{x}_3 = x_1 - x_2$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1/RC_1 & 0 & -1/C_1 \\ 0 & 0 & 1/C_2 \\ 1/L & -1/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/RC_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

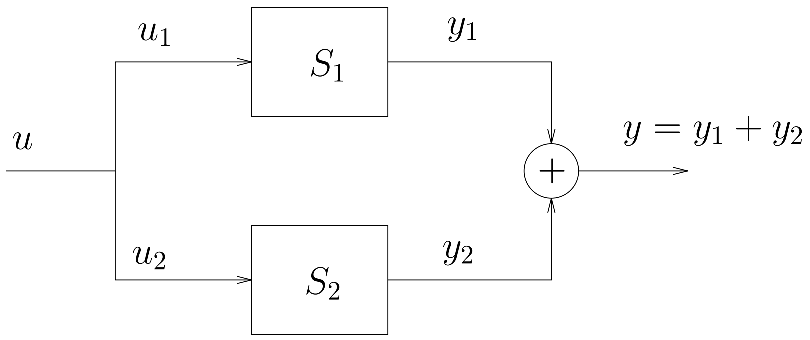
Breve histórico: Entrada-Saída $\times$ Variáveis de Estado

- Entrada-Saída (anterior a 1960)
  - descreve apenas a relação entrada-saída do sistema;
  - aplica-se somente a sistemas relaxados;
  - pode ser obtida através de medidas diretas:
    - · resposta ao impulso;
    - · resposta em freqüência.

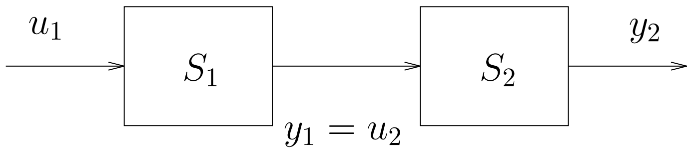
- Variáveis de Estado (posterior a 1960)
  - inclui a representação interna do sistema;
  - aplica-se a sistemas com condições iniciais quaisquer;
  - pode ser de difícil determinação para sistemas complexos;
  - essencial no estudo de problemas de Controle Ótimo;
  - solução facilmente implementada em computador.

Descrição Matemática de Sistemas Compostos

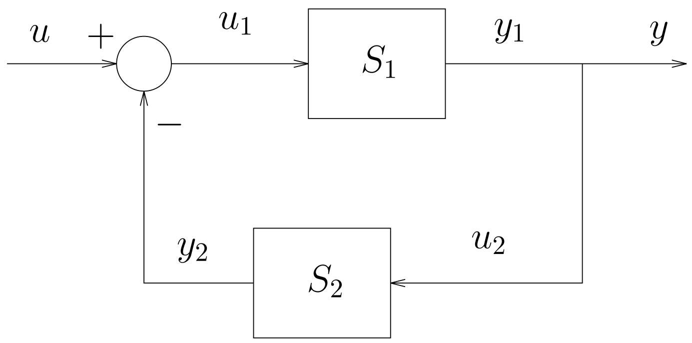
a) Conexão em paralelo



b) Conexão em cascata



c) Conexão com realimentação



Representação em Variáveis de Estado

$$S_1 \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + E_1 u_1 \end{cases}$$

$$S_2 \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + E_2 u_2 \end{cases}$$

a)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (E_1 + E_2) u$$

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 E_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} E_2 C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + E_2 E_1 u$$

c)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1Y_2E_2C_1 & -B_1Y_2C_2 \\ B_2Y_1C_1 & A_2 - B_2Y_1E_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_1Y_2 \\ B_2Y_1E_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} Y_1C_1 & -Y_1E_1C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y_1E_1u$$

$$Y_1 \triangleq (\mathbf{I} + E_1E_2)^{-1} \quad ; \quad Y_2 \triangleq (\mathbf{I} + E_2E_1)^{-1}$$

Y_1, Y_2 devem existir $\forall\ t$

Representação na freqüência

$$G_1(s) \quad \longleftrightarrow \quad S_1 \qquad ; \qquad G_2(s) \quad \longleftrightarrow \quad S_2$$

a) $G_1 + G_2$

b) G_2G_1

c) Sejam G_1 e G_2 matrizes racionais próprias de S_1 e de S_2. Então, se $\det(\mathbf{I}_q + G_1G_2) \neq 0$ (condição necessária para a conexão)

$$G = G_1(\mathbf{I}_p + G_2G_1)^{-1} = (\mathbf{I}_q + G_1G_2)^{-1}G_1$$