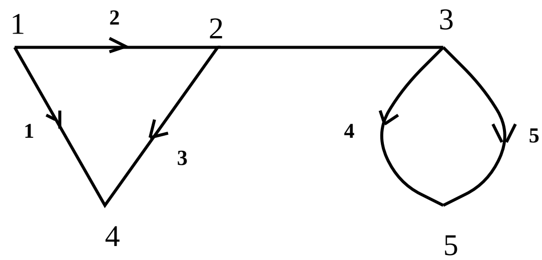
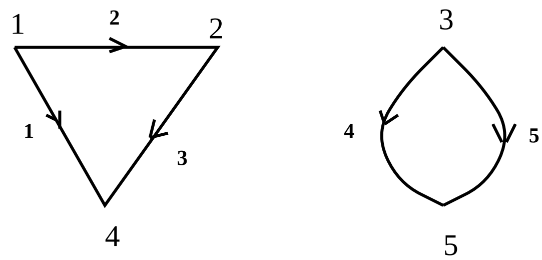
Sistemática para Obtenção de Equações de Estado

Grafo Conexo: Grafo no qual existe sempre um caminho constituído por ramos entre dois nós quaisquer.



Grafo Conexo



Grafo Não Conexo

Subgrafo: conjunto qualquer de ramos e nós de um grafo.

Corte: conjuntos de ramos que, eliminados, deixam dois subgrafos conexos.

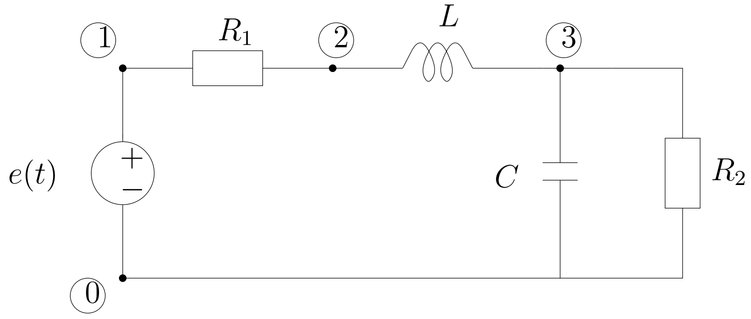
Laço: caminho fechado formado por ramos e não passando mais de uma vez por nenhum nó.

Árvore: subgrafo conexo contendo todos os nós do grafo e nenhum laço. Escolhida uma árvore para um grafo, os demais ramos (não pertencentes à árvore) são chamados de **ramos de ligação**.

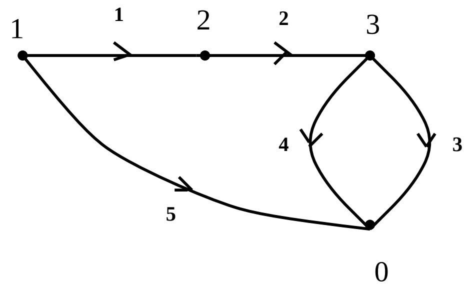
Corte Fundamental: constituído por um único ramo da árvore e ramos de ligação.

Laço Fundamental: constituído por um único ramo de ligação e ramos da árvore.

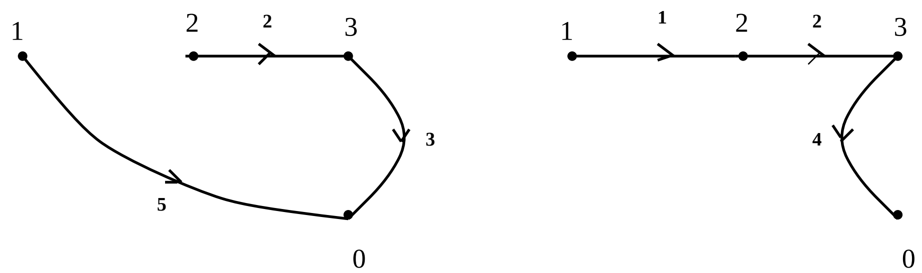
Exemplo:



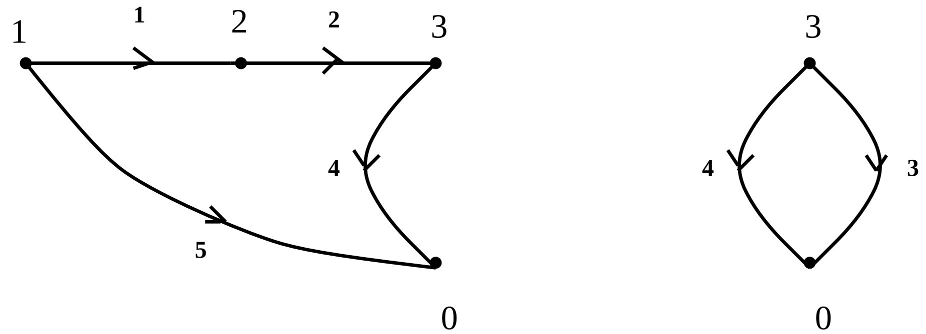
Grafo:



Árvores:

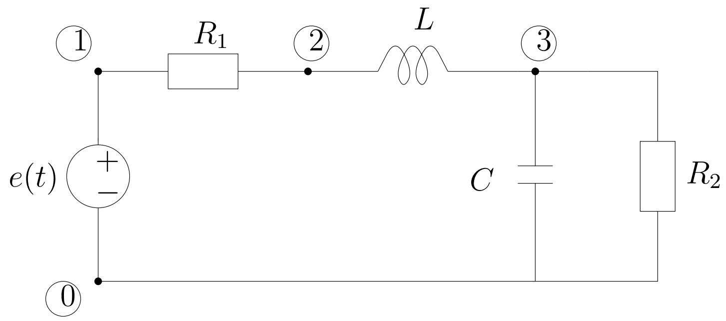


Laços:

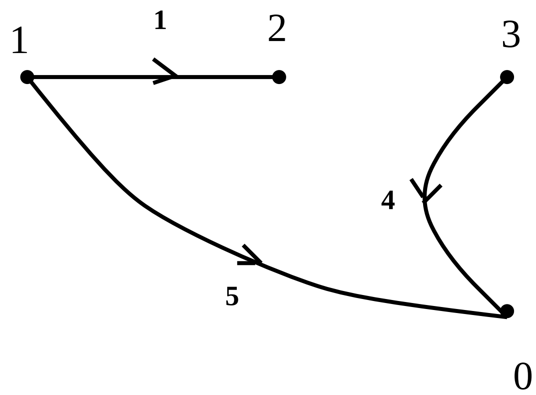


• **Árvore Própria** é uma árvore com todos os capacitores e fontes de tensão do circuito, sem indutores e sem fontes de corrente.

Exemplo:

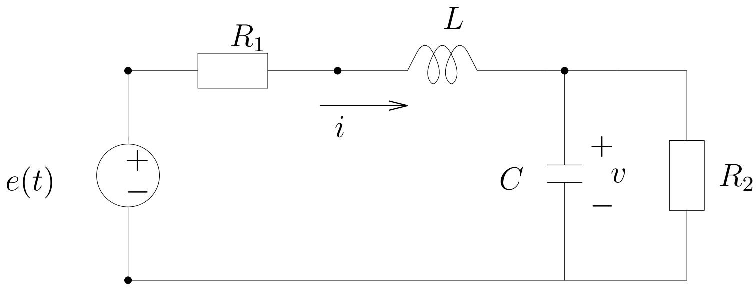


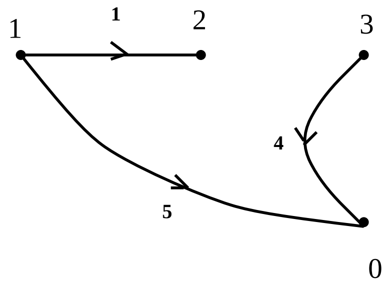
escolhendo a árvore própria



• Cada **capacitor** define um **corte fundamental**, constituído pelo capacitor e por ramos de ligação;

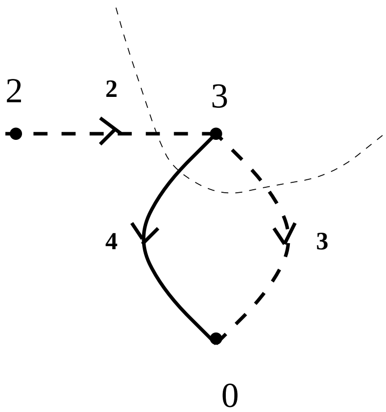
• Cada **indutor** define um **laço fundamental**, constituído pelo indutor e ramos da árvore.





A partir de cada **capacitor** e do corte fundamental apropriado (sem fontes de tensão), pode-se escrever uma **equação de correntes**;

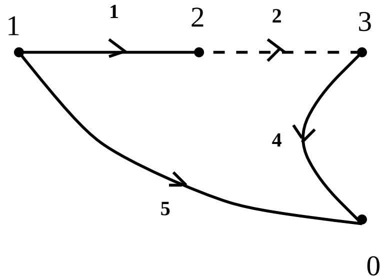
Corte Fundamental



$$i = C\dot{v} + \frac{v}{R_2}$$

A partir de cada **indutor** e do laço fundamental apropriado (sem fontes de corrente), pode-se escrever uma **equação de tensões**;

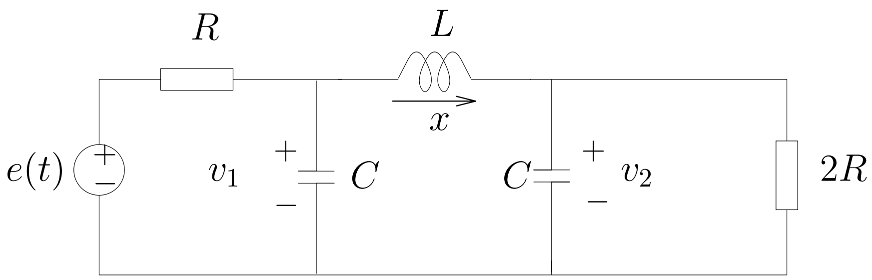
Laço Fundamental



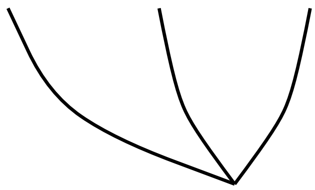
$$e(t) = R_1 i + L\frac{di}{dt} + v$$

Equações de Estado: são obtidas (em geral) a partir das equações de correntes para os cortes fundamentais e das equações de tensões para os laços fundamentais.

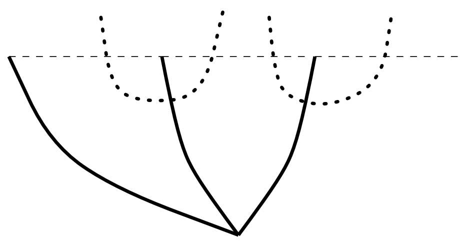
Exemplo:



Árvore Própria

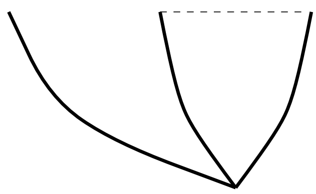


Cortes Fundamentais



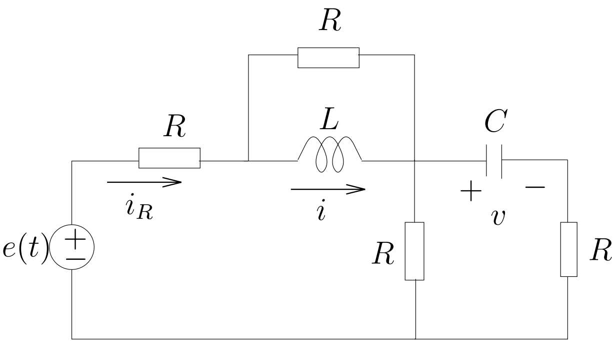
$$\frac{e(t) - v_1}{R} = C\frac{dv_1}{dt} + x \qquad , \qquad x = C\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{2R}$$

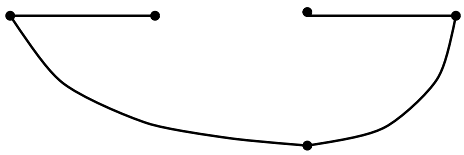
Laço Fundamental



$$v_1 = L\dot{x} + v_2$$

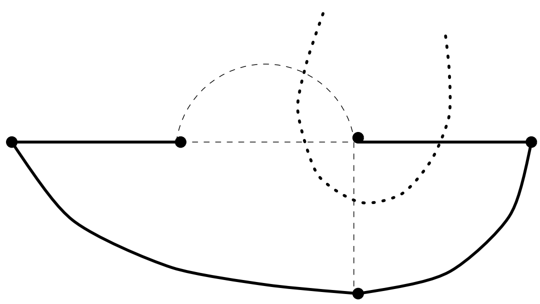
Exemplo:





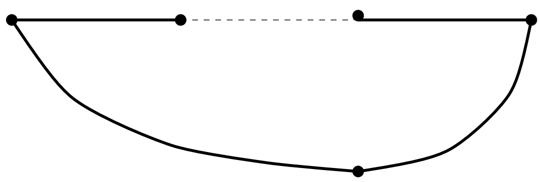
Árvore Própria

Corte Fundamental



$$i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = C\dot{v} + \frac{v + RC\dot{v}}{R}$$

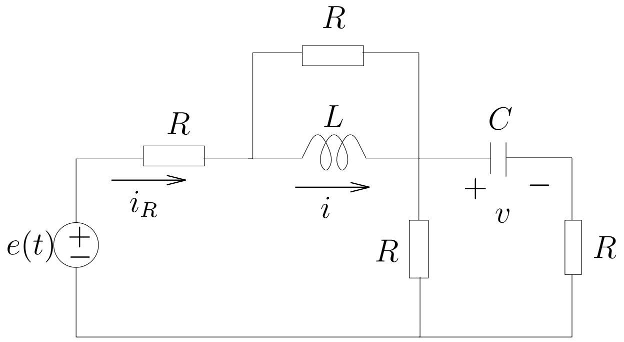
Laço Fundamental



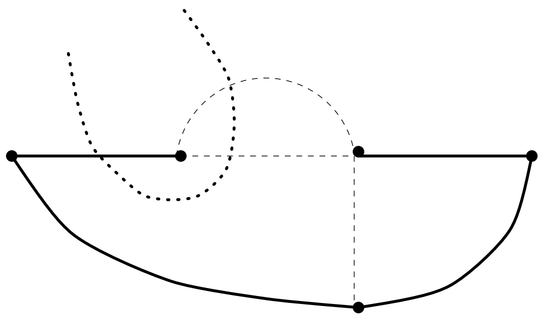
$$e(t) = Ri_R + L\frac{di}{dt} + v + RC\dot{v}$$

As equações obtidas dependem da corrente i_R (que não é variável de estado). Uma equação auxiliar é necessária:

Equação Auxiliar: Equação de correntes para o corte fundamental definido pelo resistor (se este estiver na árvore própria) ou equação das tensões para o laço fundamental definido pelo resistor (se for um ramo de ligação).



Corte Fundamental



$$i_R = \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i$$

Equações de Estado:

$$\begin{cases} RC\dot{v} + v + 2L\dfrac{di}{dt} + Ri = e(t) \\ \\ 2RC\dot{v} + v - Ri - L\dfrac{di}{dt} = 0 \end{cases}$$

Passando para a forma padrão (isolando os termos com derivada)

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{3}{5RC}v + \dfrac{1}{5C}i + \dfrac{1}{5RC}e(t) \\ \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{5L}v - \dfrac{3R}{5L}i + \dfrac{2}{5L}e(t) \end{cases}$$

Definindo $x \triangleq \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$ e a saída $y(t) \triangleq v(t)$

$$\dot{x} = Ax + Be \quad , \quad y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{3}{5RC} & \dfrac{1}{5C} \\ \\ -\dfrac{1}{5L} & -\dfrac{3R}{5L} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{5RC} \\ \\ \dfrac{2}{5L} \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $R = L = C = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Descrição por Função de Transferência

$$A = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \\ -0.2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$H(s) = C\,(s\mathbf{I} - A)^{-1}\,B + D$. Calculando $(s\mathbf{I} - A)^{-1}$

$$\begin{bmatrix} s+0.6 & -0.2 \\ 0.2 & s+0.6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+1.2s+0.4}\begin{bmatrix} s+0.6 & 0.2 \\ -0.2 & s+0.6 \end{bmatrix}$$

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s+0.6}{s^2+1.2s+0.4} & \dfrac{0.2}{s^2+1.2s+0.4} \\[2ex] \dfrac{-0.2}{s^2+1.2s+0.4} & \dfrac{s+0.6}{s^2+1.2s+0.4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

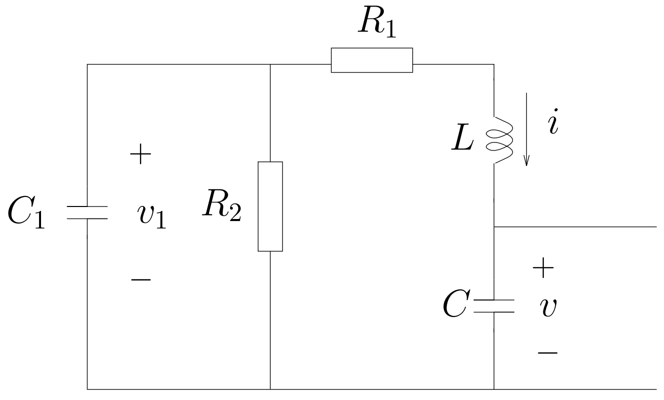
$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{0.2s+0.2}{s^2+1.2s+0.4} \\[2ex] \dfrac{0.4s+0.2}{s^2+1.2s+0.4} \end{bmatrix} = \frac{0.2s+0.2}{s^2+1.2s+0.4} \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}$$

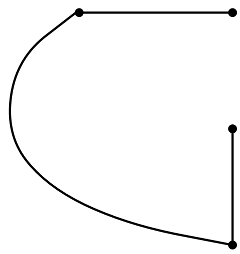
Note que

$\dfrac{0.2s+0.2}{s^2+1.2s+0.4}$ é a função de transferência para a saída igual a $v(t)$

$\dfrac{0.4s+0.2}{s^2+1.2s+0.4}$ é a função de transferência para a saída igual a $i(t)$

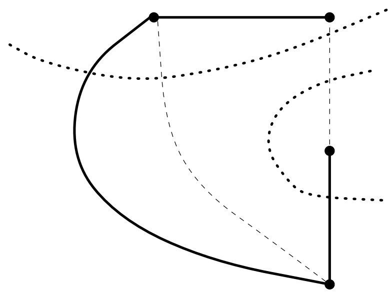
Exemplo: Obtenha as equações de estado





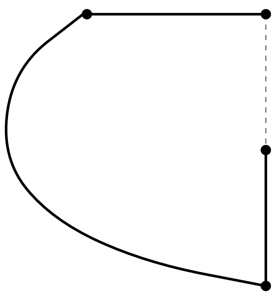
Árvore Própria

Cortes Fundamentais



$$C_1\dot{v}_1 + \frac{v_1}{R_2} + i = 0 \qquad , \qquad i = C\dot{v}$$

Laço Fundamental



$$v_1 = R_1 i + L\frac{di}{dt} + v$$

Forma Matricial: Definindo $x \triangleq \left[\begin{array}{ccc} v & v_1 & i \end{array}\right]^T$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{C} \\ \\ 0 & -\dfrac{1}{R_2C_1} & -\dfrac{1}{C_1} \\ \\ -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_1}{L} \end{bmatrix} x(t)$$

Considerando $x(0) = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^T$ e usando Transformada de Laplace

$$X(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}\, x(0) \quad , \quad Y(s) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] X(s)$$

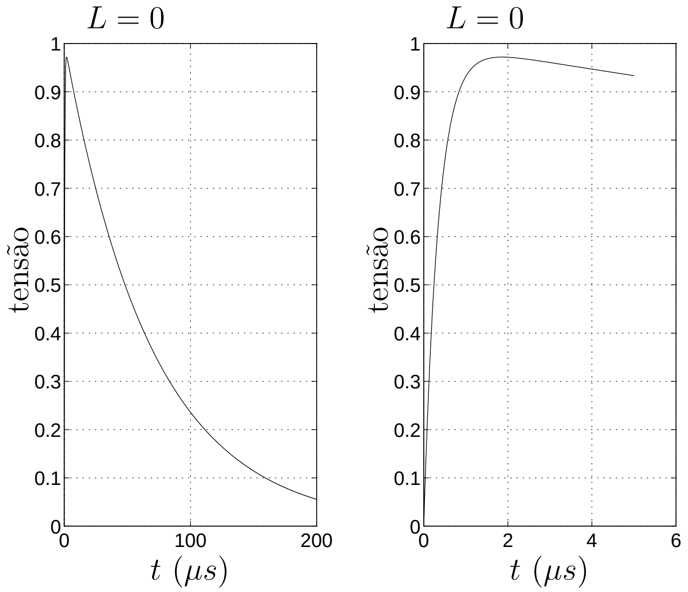
Portanto,

$$V(s) \ \triangleq \ Y(s) \ = \ \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} s & 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \\ 0 & s + \dfrac{1}{R_2C_1} & \dfrac{1}{C_1} \\ \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{1}{L} & s + \dfrac{R_1}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

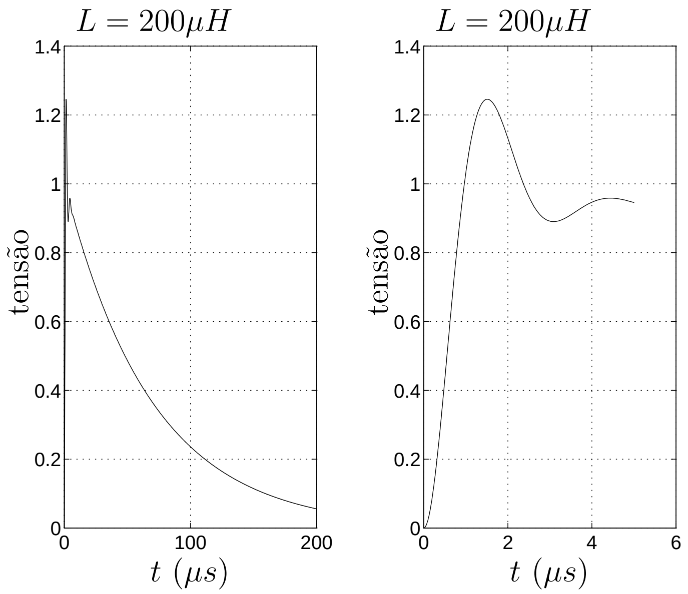
e $v(t)$ é a anti-transformada de

$$\frac{R_2C_1}{LCC_1R_2s^3 + (R_1R_2CC_1 + LC)\, s^2 + (C_1R_2 + CR_1 + CR_2)\, s + 1}$$

$C_1 = 0.6\mu F$, $C = 0.001\mu F$, $R_1 = 350\Omega$, $R_2 = 115\Omega$ e $L =$ indutância parasita.



O pulso atinge 90% de seu valor de pico em $1\mu s$, caindo para 50% deste valor em $50\mu s$.



A indutância parasita (relativamente pequena) provoca uma oscilação espúrea no pulso.