Estabilidade Entrada-Saída

Considere o sistema linear SISO invariante no tempo, causal e relaxado em $t = 0$, descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$g(t)$: resposta ao impulso do sistema, ou seja, a saída do sistema no tempo t para um impulso aplicado na entrada no instante $\tau = 0$

Uma entrada $u(t)$ é **limitada** se

$$|\ u(t)\ | \leq u_m < \infty \ \text{ para todo } \ t \geq 0$$

• Um sistema relaxado é BIBO estável (*Bounded-Input — Bounded-Output*) se para qualquer entrada limitada a saída também for limitada.

Teorema

Um sistema SISO relaxado descrito por

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

é BIBO-estável se e somente se $g(t)$ for absolutamente integrável no intervalo $[0, \infty)$, isto é, se existir uma constante M tal que

$$\int_0^\infty |\ g(t)\ | \ dt \ \leq M < \infty$$

Prova: primeiramente, mostra-se que se $g(t)$ é absolutamente integrável, toda entrada limitada causa uma saída também limitada. Seja $u(t)$ arbitrária com $\mid u(t) \mid \leq u_m < \infty$ para todo $t \geq 0$. Então,

$$\mid y(t) \mid = \left| \int_0^t g(t)u(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_0^t \mid g(t) \mid \mid u(t-\tau) \mid d\tau$$

$$\leq u_m \int_0^t \mid g(t) \mid d\tau \leq u_m M$$

e portanto a saída é limitada.

Agora, mostra-se (intuitivamente) que se $g(t)$ não for absolutamente integrável, então o sistema não é BIBO estável. Se $g(t)$ não é absolutamente integrável, existe t_1 tal que

$$\int_0^{t_1} \mid g(\tau) \mid d\tau = \infty$$

Escolhendo a entrada limitada

$$u(t_1 - t) = \begin{cases} +1 & \text{se} \;\; g(t) \geq 0 \\ -1 & \text{se} \;\; g(t) < 0 \end{cases}$$

tem-se, no entanto, a saída ilimitada

$$y(t_1) = \int_0^{t_1} g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} \mid g(\tau) \mid d\tau = \infty$$

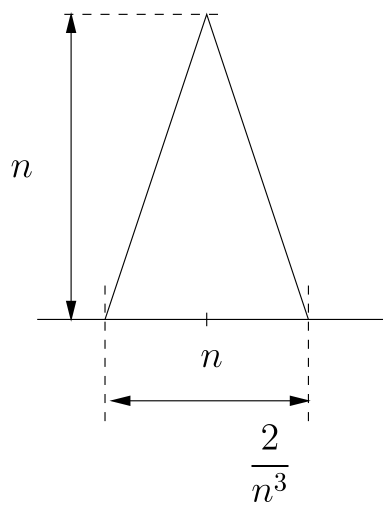
e portanto o sistema não é BIBO estável.

• Uma função absolutamente integrável pode não ser limitada ou pode não tender a 0 quando $t \to \infty$

Exemplo: considere a função

$$f(t-n) = \begin{cases} n + (t-n)n^4 & \text{para } n - 1/n^3 \leq t \leq n \\ \\ n - (t-n)n^4 & \text{para } n < t \leq n + 1/n^3 \end{cases}$$

definida para $n = 2, 3, \ldots$ com área sob cada triângulo igual a $1/n^2$.



A integral do valor absoluto da função é $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1/n^2) < \infty$.

$\Longrightarrow$ A função é absolutamente integrável mas não é limitada nem tende a zero quando $t \to \infty$

Teorema

Se um sistema com resposta ao impulso $g(t)$ é BIBO estável, então, quando $t \to \infty$

- A resposta a uma entrada $u(t) = a$, para $t \geq 0$, tende a $G(0)a$
- A resposta a uma entrada $u(t) = \sin(\omega_0 t)$, para $t \geq 0$, tende a

$$\mid G(j\omega_0) \mid \;\; \sin(\omega_0 t + \theta) \quad ; \quad \theta \triangleq \angle G(j\omega_0)$$

sendo $G(s)$ a transformada de Laplace de $g(t)$, isto é

$$G(s) = \int_0^\infty g(\tau) \exp(-s\tau) d\tau$$

Se $u(t) = a$,

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = a \int_0^t g(\tau) d\tau$$

$$y(t) \to a \int_0^\infty g(\tau) d\tau = aG(0)$$

Se $u(t) = \sin(\omega_0 t)$,

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \sin[\omega_0 (t - \tau)] d\tau =$$

$$= \int_0^t g(\tau)[\sin(\omega_0 t) \cos(\omega_0 \tau) - \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 \tau)] d\tau =$$

$$= \sin(\omega_0 t) \int_0^t g(\tau) \cos(\omega_0 \tau) d\tau - \cos(\omega_0 t) \int_0^t g(\tau) \sin(\omega_0 \tau) d\tau$$

Quando $t \to \infty$

$$y(t) \to \sin(\omega_0 t) \int_0^\infty g(\tau)\cos(\omega_0 \tau) d\tau - \cos(\omega_0 t) \int_0^\infty g(\tau)\sin(\omega_0 \tau) d\tau$$

Por outro lado, em $s = j\omega$,

$$G(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau)[\cos(\omega\tau) - j\sin(\omega\tau)]d\tau$$

Como assume-se implicitamente que $g(t)$ (resposta ao impulso) é real, tem-se

$$\text{Re } G(j\omega) = \int_0^\infty g(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

$$\text{Im } G(j\omega) = -\int_0^\infty g(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau$$

Substituindo na expressão para $y(t)$, tem-se

$$y(t) \to \sin(\omega_0 t)\text{Re } G(j\omega_0) + \cos(\omega_0 t)\text{Im } G(j\omega_0)$$

$$y(t) \to |\ G(j\omega_0)\ |\ \ \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$\theta \triangleq \angle G(j\omega_0) = \tan^{-1}\left[\text{Im } G(j\omega_0)/\text{Re } G(j\omega_0)\right]$$

Teorema

Um sistema SISO com função de transferência racional própria $G(s)$ é BIBO estável se e somente se todos os pólos de $G(s)$ têm parte real negativa ou, equivalentemente, estão no semi-plano esquerdo do plano complexo.

• Se $G(s)$ tem um pólo p_i com multiplicidade m_i, a expansão em frações parciais de $G(s)$ contém fatores

$$\frac{1}{s-p_i} \ ; \quad \frac{1}{(s-p_i)^2} \ ; \quad \cdots \ ; \quad \frac{1}{(s-p_i)^{m_i}}$$

e portanto a transformada inversa de Laplace contém os fatores

$$\exp(p_i t) \ ; \quad t\exp(p_i t) \ ; \quad \ldots \ ; \quad t^{m_i-1}\exp(p_i t)$$

Como pode ser verificado, cada um desses termos é absolutamente integrável se e somente se p_i tem parte real negativa.

Teorema

Um sistema MIMO com matriz resposta ao impulso $G(t) = [g_{ij}(t)]$ é BIBO estável se e somente se todo $g_{ij}(t)$ for absolutamente integrável em $[0, \infty)$.

Teorema

Um sistema MIMO com matriz de transferência própria $G(s) = [G_{ij}(s)]$ é BIBO estável se e somente se todo pólo de $G_{ij}(s)$ tiver parte real negativa.

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

cuja matriz de transferência é dada por

$$G(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$$

A resposta ao estado nulo é BIBO estável se e somente se todo pólo de $G(s)$ tiver parte real negativa (isto é, todos os pólos dos elementos $G_{ij}(s)$ da matriz de transferência).

Como

$$G(s) = \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - A)} C[\text{Adj }(s\mathbf{I} - A)]B + D$$

então todo pólo de $G(s)$ é também um autovalor de A. Assim, se todo autovalor de A tem parte real negativa, então o sistema é BIBO estável.

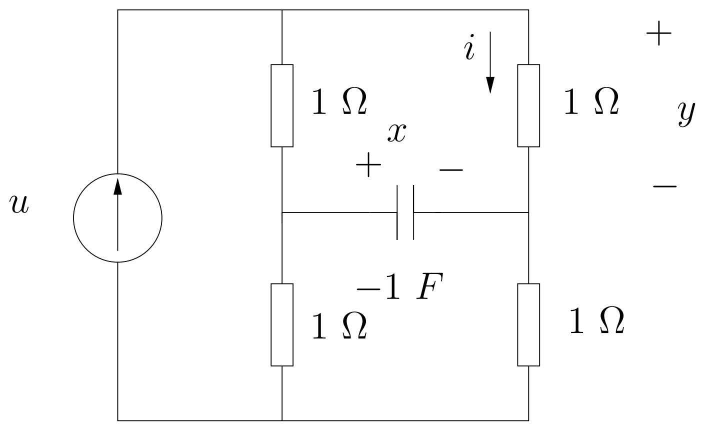
- Nem todo autovalor de A é pólo de $G(s)$ (cancelamentos).
- Portanto, A pode ter autovalores nulos ou com parte real positiva e ainda assim o sistema pode ser BIBO estável.

Exemplo:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$g(s) = \frac{1}{s+1} \quad ; \quad g(t) = \exp(-t) \quad \text{BIBO-estável}$$

Exemplo: considere o circuito



Equações:

$$(u - i) + x - i = 0 \quad ; \quad x + (i - \dot{x}) = (u - i + \dot{x}) \quad ; \quad y = i$$

Equação de estado:

$$\dot{x} = x \quad ; \quad y = 0.5x + 0.5u$$

Função de transferência:

$$G(s) = 0.5(s-1)^{-1}0 + 0.5 = 0.5$$

O autovalor positivo 1 da matriz dinâmica não é um pólo da função de transferência; a função de transferência é igual a uma constante 0.5 (não existe pólo, e portanto não há condição a ser satisfeita).

$\Longrightarrow$ O sistema é BIBO estável.

Sistemas Discretos

Considere o sistema discreto SISO descrito por

$$y(k) = \sum_{m=0}^{k} g(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^{k} g(m)u(k-m)$$

sendo $g(k)$ a resposta ao impulso, ou equivalentemente, a saída para uma seqüência impulsiva aplicada em $k = 0$.

Uma seqüência $u(k)$ é limitada se $u(k)$ não cresce (ou descresce) indefinidamente, ou seja, se existe uma constante u_m tal que

$$| \, u(k) \, | \leq u_m < \infty \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Um sistema é BIBO estável se toda seqüência limitada aplicada na entrada provocar uma seqüência limitada na saída.

Teorema

Um sistema discreto SISO é BIBO-estável se e somente se $g(k)$ for absolutamente somável no intervalo $[0, \infty)$, isto é, se existir uma constante M tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} | \, g(k) \, | \leq M < \infty$$

Teorema

Se um sistema discreto SISO com resposta ao impulso $g(k)$ é BIBO estável, então, quando $k \to \infty$

- A resposta a uma entrada $u(k) = a$, para $k \geq 0$, tende a $G(1)a$
- A resposta a uma entrada $u(k) = \sin(\omega_0 k)$, para $k \geq 0$, tende a

$$\mid G[\exp(j\omega_0)] \mid \ \sin(\omega_0 t + \theta) \quad ; \quad \theta \triangleq \angle G[\exp(j\omega_0)]$$

sendo $G(z)$ a transformada Z de $g(k)$, isto é $G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g(m) z^{-m}$

Teorema

Um sistema discreto SISO com função de transferência racional própria $G(z)$ é BIBO estável se e somente se todos os pólos de $G(z)$ têm magnitude menor do que 1 ou, equivalentemente, estão no interior do círculo unitário do plano complexo z.

- Se $G(z)$ tem um pólo p_i com multiplicidade m_i, a expansão em frações parciais de $G(z)$ contém fatores

$$\frac{1}{z - p_i} \ ; \ \frac{1}{(z - p_i)^2} \ ; \ \cdots \ ; \ \frac{1}{(z - p_i)^{m_i}}$$

e portanto a transformada inversa Z contém os fatores

$$p_i^k \ ; \ k p_i^k \ ; \ \ldots \ ; \ k^{m_i - 1} p_i^k$$

Como pode ser verificado, cada um desses termos é absolutamente somável se e somente se p_i tem magnitude menor do que 1.

• No caso contínuo, uma função absolutamente integrável não necessariamente é limitada nem tende a zero quando $t \to \infty$.

• Para sistemas discretos, se $g(k)$ é absolutamente somável, então $g(k)$ é limitada e tende a zero quando $k \to \infty$. No entanto, o contrário pode não ser verdadeiro.

Exemplo: considere um sistema discreto invariante no tempo com a resposta ao impulso dada pela seqüência $g(k) = 1/k$, para $k = 1, 2, \ldots$ e $g(0) = 0$. Calculando a soma

$$S \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \mid g(k) \mid = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

Para cada termo dentro de parênteses, a soma é sempre maior que 1/2 e portanto

$$S > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

$\Longrightarrow$ sistema não é BIBO estável

No entanto, esta seqüência resposta ao impulso é limitada e tende a zero quando $k \to \infty$

Teorema

Um sistema discreto MIMO com matriz resposta ao impulso $G(k) = [g_{ij}(k)]$ é BIBO estável se e somente se todo $g_{ij}(k)$ for absolutamente somável.

Teorema

Um sistema MIMO com matriz de transferência própria $G(z) = [G_{ij}(z)]$ é BIBO estável se e somente se todo pólo de $G_{ij}(z)$ tiver magnitude menor que 1.

Estabilidade BIBO de Equações Dinâmicas Discretas

Considere o sistema

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) + Du(k) \end{array}$$

cuja matriz de transferência é dada por $G(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$

A resposta ao estado nulo é BIBO estável se e somente se todo pólo de $G(z)$ tiver magnitude menor do que 1 (isto é, todos os pólos dos elementos $G_{ij}(z)$ da matriz de transferência).

Como

$$G(z) = \frac{1}{\det(z\mathbf{I} - A)} C[\text{Adj } (z\mathbf{I} - A)]B + D$$

então todo pólo de $G(z)$ é também um autovalor de A. Assim, se todo autovalor de A tem magnitude menor do que 1, então o sistema é BIBO estável.

• Como no caso contínuo, nem todo autovalor de A é pólo de $G(z)$ (pode haver cancelamentos).