Revisão

R1: Compute os determinantes das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda_3 - 3 \end{bmatrix}$$

R2: Obtenha as inversas (quando possível):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

R3: Mostre que

a) $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & \mathbf{I} \end{array}\right]\right) = \det(A)$

b) $\det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline B & C \end{array}\right]\right) = \det(A)\det(C)$

c) $$\begin{aligned} \det\left(\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]\right) &= \det(A)\det(D - CA^{-1}B) \ \text{ se } A^{-1} \text{ existir} \\ &= \det(D)\det(A - BD^{-1}C) \ \text{ se } D^{-1} \text{ existir} \end{aligned}$$

R4: Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica (isto é, $M = M'$) com uma matriz anti-simétrica ($M = -M'$)

R5: Mostre que $\mathbf{Tr}\ (AB) = \mathbf{Tr}\ (BA)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$ (Obs.: $\mathbf{Tr}\ (\cdot) \triangleq$ função Traço, é a soma dos elementos da diagonal da matriz $(\cdot)$).

R6: Mostre que $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right) = \det(A+B)\det(A-B)$, $A \in \Re^{n\times n}$ e $B \in \Re^{n\times n}$.

R7: Determine a solução do conjunto de equações:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

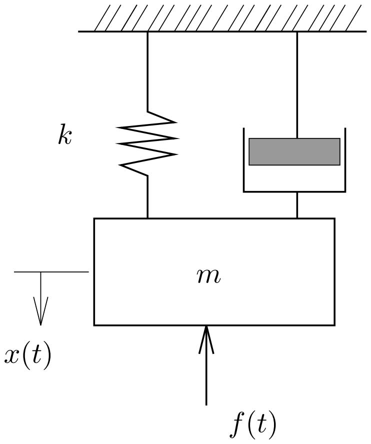
R8: Calcule os autovalores (isto é, valores de λ tais que $\det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$):

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

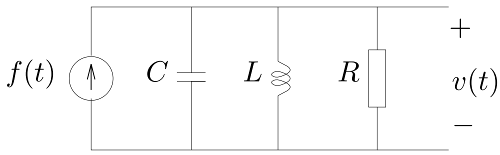
R9: Verifique que, para $A \in \Re^{2\times 2}$ qualquer, sua equação característica ($\det(\lambda\mathbf{I} - A) = 0$)

$$\lambda^2 - \mathbf{Tr}\ (A)\lambda + \det(A) = 0$$

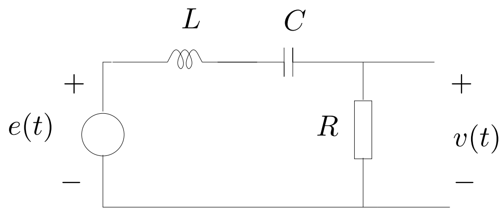
R10: Obter o modelo matemático:



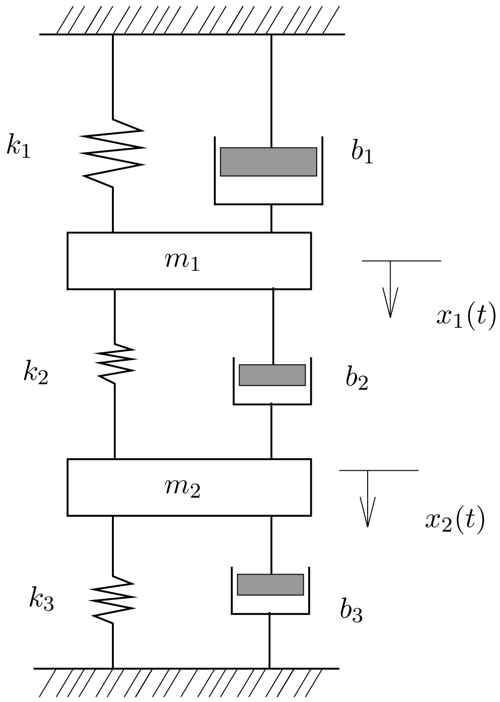
a)



b)

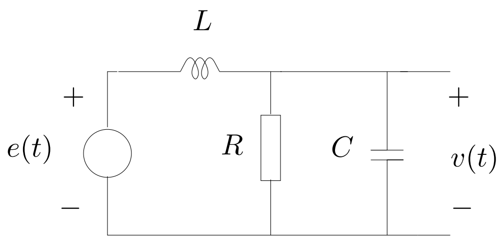


c)

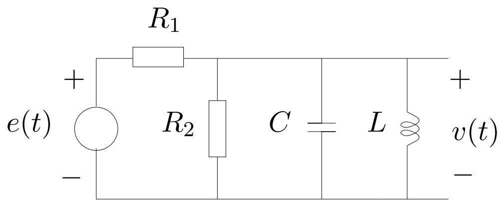


d)

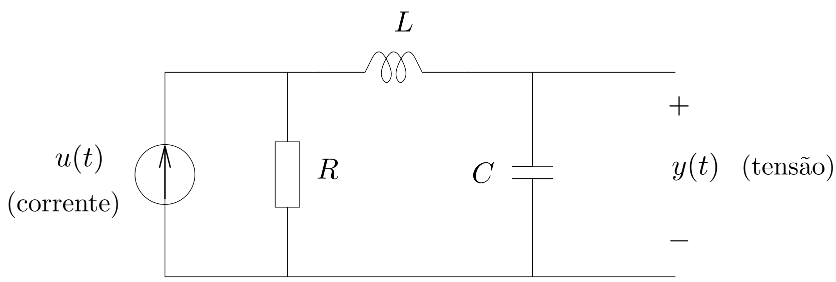
e) Relacione $v(t)$ com $e(t)$:



f) Relacione $v(t)$ com $e(t)$:



R11: Considere o circuito abaixo



a) Obtenha a equação diferencial que descreve o comportamento do circuito.

b) Obtenha a função de transferência,

c) Obtenha a resposta ao impulso e a um degrau unitário.

d) Considerando $x_1 \triangleq$ tensão no capacitor e $x_2 \triangleq$ corrente no indutor, obtenha as equações de estado.

e) Obtenha a função de transferência considerando como saída a corrente no indutor.

R12: Resolver usando transformada de Laplace e o método dos coeficientes a determinar:

a) $\ddot{x} + x = 2$; $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$.

b) $\ddot{x} - x = 2$; $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.

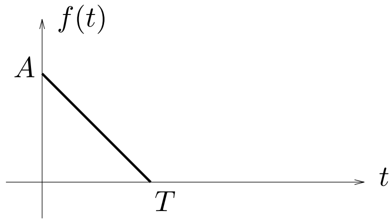
c) $\dot{x} + x = \sin t$; $x(0) = 3$.

d) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = t^2 + \exp(-t)$; $x(0) = \dot{x}(0) = 0$

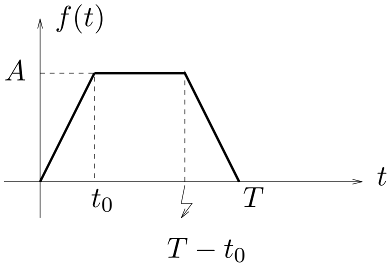
R13: Determine a transformada de Laplace:

a) $f(t) = t^3 - 2t + 1$, $t \geq 0$.

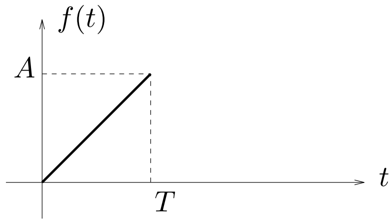
b)



c)



d)



R14: Traçar os Diagramas de Bode (Módulo e Fase):

a) $G(s) = \dfrac{4}{(s+3)(s+8)}$

b) $G(s) = \dfrac{5(1+0.01s)^2}{s(1+0.0001s)^2}$

c) $G(s) = \dfrac{4}{(s+5)^2}$

R15: Ache as soluções $y(t)$ ($Y(s) = G(s)U(s)$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$) para a entrada impulsiva e para o degrau.

a) $G(s) = \dfrac{2s^2+3}{s^2+3s+2}$

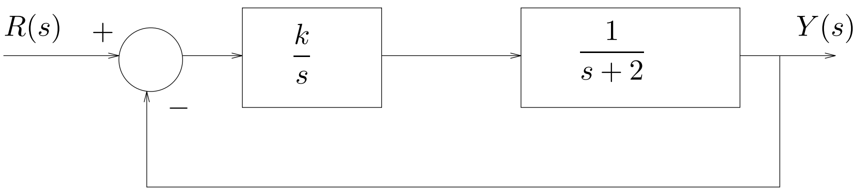
b) $G(s) = \dfrac{5}{s^2-s-2}$

c) $G(s) = \dfrac{2}{s(s^2+3s+2)}$

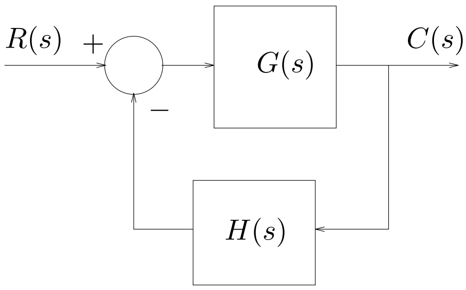
R16: Resolva as equações a diferenças:

a) $x(k+2) - 7x(k+1) + 10x(k) = 0$
b) $x(k+1) - 4x(k) = 3$; $x(0) = 8$

R17: Quais os valores de k que mantêm o sistema abaixo estável ? Para quais valores não ocorrem oscilações ?



R18: Considere o sistema de controle:



a) $G(s) = \dfrac{k_0}{s(1+0.02s)(1+0.01s)}$; $H(s) = 1$

Traçar o Lugar das Raízes e determinar o valor de k_0 no cruzamento do eixo imaginário.

b) $G(s) = \dfrac{k(1+s/5)}{s^2(1+s/12)}$; $H(s) = 1 + \dfrac{s}{12}$

Traçar o Lugar das Raízes e determinar o valor de k de modo que os pólos dominantes tenham uma constante de tempo de 1/3 segundos.

Exercicios

E1: Sejam G_1 $q \times p$ e G_2 $p \times q$ matrizes racionais em s (não necessariamente próprias). Mostre que

$$\det(\mathbf{I}_p + G_2 G_1) = \det(\mathbf{I}_q + G_1 G_2)$$

E2: Mostre que se $\det(\mathbf{I}_q + G_1 G_2) \neq 0$, então

$$G_1(\mathbf{I}_p + G_2 G_1)^{-1} = (\mathbf{I}_q + G_1 G_2)^{-1} G_1$$

E3: Mostre que, num espaço de dimensão finita, quaisquer duas bases contêm o mesmo número de elementos.

E4: Mostre que num espaço linear n-dimensional, o número de vetores de qualquer base é igual a n.

E5: Seja $\{v^1, v^2, \ldots, v^n\}$ uma base de um espaço linear n-dimensional. Mostre que a representação de qualquer vetor deste espaço na base especificada é única.

E6: Encontre a representação do vetor $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ na base

$$v^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E7: Mostre que o conjunto de todas as matrizes reais 2×2 forma um espaço linear de dimensão 4 sobre os reais.

E8: Considere a base do $\Re^3$ formada pelas colunas da matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Suponha que na base ortonormal $\{n^1, n^2, n^3\}$ um vetor x é dado por $x' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$. Encontre a representação de x na base definida por Q.

E9: A representação de um operador linear L em relação a uma base $\{x^1, x^2\}$ é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que o operador é unicamente determinado pelos pares $\left(x^i, y^i = L(x^i)\right)$ e que

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ x^3 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ y^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ y^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ y^3 = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

encontre a representação de L na base $\{x^1, x^3\}$ e mostre que $\bar{A} = PAP^{-1}$.

E10: Dados

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ ; \ \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

encontre as representações de A em relação às bases $\{b, Ab, A^2b, A^3b\}$ e $\{\bar{b}, A\bar{b}, A^2\bar{b}, A^3\bar{b}\}$.

E11: Dados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(representação do operador linear A na base $\{e^1, e^2\}$), e a base $\{v^1, v^2\}$, com

$$e^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ e^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ v^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

encontre $\bar{A}$ (representação de A na base $\{v^1, v^2\}$).

E12: Determine os ranks e nulidades das seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \ ; \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E13: Determine bases para os espaços ranges e para os espaços nulos das matrizes indicadas na questão anterior.

E14: Mostre que matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico e, conseqüentemente, o mesmo conjunto de autovalores.
[sugestão: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$]

E15: Mostre que para qualquer matriz $A \in \Re^{n \times n}$

$$\mathbf{Tr}\ (A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

sendo que λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são os autovalores de A.

E16: Encontre as representações das seguintes matrizes na Forma Canônica de Jordan

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \ ; \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

E17: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

Mostre que o polinômio característico de A é

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - A) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \alpha_2\lambda^{n-2} + \cdots + +\alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

e que se λ_1 é um autovalor de A, então

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

é um autovetor associado a λ_1.

E18: Mostre que a matriz A da questão anterior é não-singular se e somente se $\alpha_n \neq 0$. Verifique que neste caso

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\alpha_{n-1}/\alpha_n & -\alpha_{n-2}/\alpha_n & \cdots & -\alpha_1/\alpha_n & -1/\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E19: Mostre que uma matriz quadrada é não singular se e somente se não possuir nenhum autovalor nulo.

E20: Sob que condição $AB = AC$ implica $B = C$? Assuma que A é uma matriz quadrada.

E21: Sejam A e B matrizes quadradas de mesma dimensão. Mostre que se $AB = 0$, então uma das seguintes afirmações é verdadeira:
a) $A = 0$.
b) $B = 0$.
c) A e B são singulares.

E22: Mostre que se λ é um autovalor de A com autovetor associado x, então $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(A)$ com o mesmo autovetor x.
[sugestão: mostre primeiro que $A^k x = \lambda^k x$].

E23: Mostre que funções de uma mesma matriz comutam, ou seja,

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

e como conseqüência, $A\exp(At) = \exp(At)A$.

E24: Calcule A^{100} e $\exp(At)$ para as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

E25: Obtenha $\exp(2At)$, para $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$

a) Pela Forma de Jordan.
b) Usando um polinômio matricial $g(A)$.

E26: Seja

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Encontre uma matriz B tal que $\exp(B) = C$. Mostre que se, para algum i, tem-se $\lambda_i = 0$, então B não existe.

E27: Seja $A \in \Re^{n\times n}$. Mostre, usando o Teorema de Cayley-Hamilton, que A^k, $k \geq n$, pode ser escrito como combinação linear de $\left\{\mathbf{I}, A, \ldots, A^{n-1}\right\}$.

E28: Seja A uma matriz com autovalores distintos, e q^i um autovetor à direira de A, associado a λ_i, isto é, $Aq^i = \lambda_i q^i$. Defina $Q \triangleq \left[\begin{array}{cccc} q^1 & q^2 & \cdots & q^n \end{array}\right]$ e

$$P \triangleq Q^{-1} = \left[\begin{array}{c} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{array}\right]$$

sendo que p^i é a i-ésima linha de P. Mostre que p^i é um autovetor à esquerda de A associado com λ_i, isto é, $p^i A = \lambda_i p^i$.

E29: Seja $A \in \Re^{n\times n}$ e (λ_i, q^i), (β_i, p^i), $i = 1, 2, \ldots, n$ os pares de autovalores-autovetores à direita e à esquerda de A, isto é,

$$Aq^i = \lambda_i q^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$p^i A = \beta_i p^i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

sendo que q^i e p^i são, respectivamente, vetores coluna e linha de dimensão n.

a) Mostre que $\lambda_i = \beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

b) Mostre que, para quaisquer dois autovalores distintos de A, o autovetor à esquerda de um autovalor é ortogonal ao autovetor à direita do outro;

E30: Considere $A \in \Re^{n\times n}$ com autovalores distintos, e seja q^i um autovetor à direita de A, associado a λ_i. Defina

$$Q \triangleq \left[\begin{array}{cccc} q^1 & q^2 & \cdots & q^n \end{array}\right] \qquad \text{e} \qquad P = Q^{-1} \triangleq \left[\begin{array}{c} p^1 \\ p^2 \\ \vdots \\ p^n \end{array}\right]$$

sendo que p^i é a i-ésima linha de P. Mostre que p^i é um autovetor à esquerda de A, associado a λ_i. Mostre também que

$$(s\mathbf{I} - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s - \lambda_i} q^i p^i$$

Qual seria a resposta $x(t)$ para o sistema $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$? Como x_0 poderia ser escolhido para que um único modo (por exemplo, λ_k) seja excitado?

E31: Considere a matriz A dada por

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

Determine seus autovalores, autovetores associados e a correspondente representação na Forma de Jordan.

E32: Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

a) Determine o rank de A

b) Determine a dimensão do espaço nulo de A ($\mathcal{N}(A) \triangleq \{x : Ax = 0\}$)

c) Obtenha uma base para o range de A ($\mathcal{R}(A) \triangleq \{y : y = Ax\}$)

d) Obtenha uma base para o espaço nulo de A

E33: Considere a solução geral de um sistema linear da forma

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \alpha \in \Re$$

a) Encontre um sistema $Ax = b$, com $A \in \Re^{2\times 3}$, que admita x acima como solução geral.

b) Qual é o rank da matriz A?

c) Qual a dimensão de seu espaço nulo?

d) Encontre uma base para o range de A.

E34: Qual a representação na base

$$\{1, t, t^2, t^3\}$$

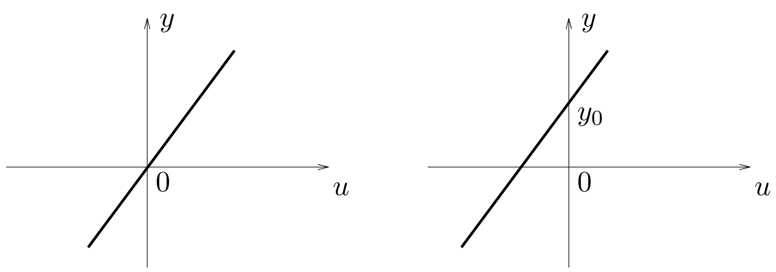
da transformação linear A que representa a diferenciação em t para polinômios de grau 3?

E35: Considere a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Usando o Teorema de Cayley-Hamilton, determine uma expressão analítica para A^{-1}

E36: Qual das características entrada-saída abaixo corresponde a um sistema linear? Redefina uma nova saída para o sistema não-linear de modo a torná-lo linear.



E37: Considere um sistema relaxado cuja relação entrada-saída é descrita por

$$y(t) = P_\alpha u(t) \triangleq \begin{cases} u(t) & , \quad t \leq \alpha \\ 0 & , \quad t > \alpha \end{cases}$$

sendo que α é uma constante e $u(t)$ uma entrada qualquer. Este sistema é chamado de *operador de truncamento*, pois ignora a entrada após transcorrido o tempo α. Verifique se este sistema satisfaz as propriedades abaixo e em todos os casos justifique sua resposta:

a) Linearidade;
b) Invariância no tempo;
c) Causalidade.

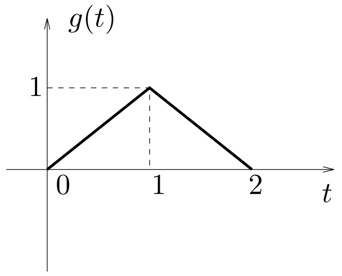
E38: A resposta ao impulso de um sistema relaxado é dada por $g(t,\tau) = \exp(- \mid t - \tau \mid)$, $\forall\ t$, $\forall\ \tau$. Este sistema é causal ? É invariante no tempo ?

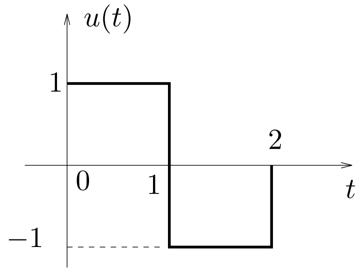
E39: Mostre que se $H(u^1 + u^2) = Hu^1 + Hu^2$ para quaisquer u^1, u^2, então $H\alpha u = \alpha Hu$ para qualquer u e qualquer número racional α ($\alpha = n/m$, n e m inteiros).

E40: Encontre a saída

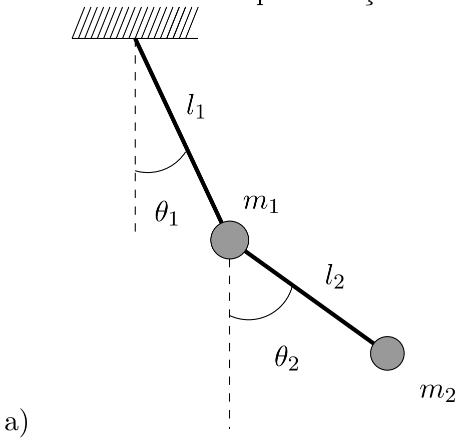
$$y(t) = \int_0^\infty g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

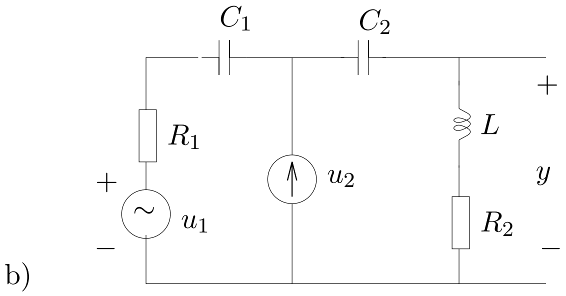
se a resposta ao impulso do sistema dada por $g(t)$ e a entrada $u(t)$ são como mostradas abaixo:





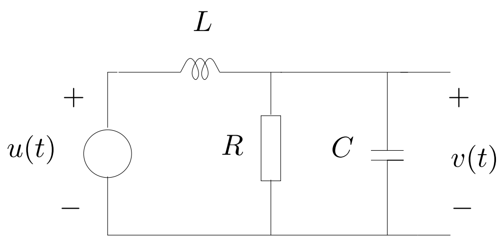
E41: Encontre as representações entrada-saída e por variáveis de estado para os sistemas abaixo:





No item a), obtenha apenas a representação por variáveis de estado do sistema linearizado.

E42: Considere o circuito RLC abaixo, com $R = 0.5\ \Omega$, $L = 1$ H e $C = 1$ F.



a) Defina $x_1 \triangleq$ corrente no indutor e $x_2 \triangleq$ tensão no capacitor, e encontre a representação do sistema na forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

b) Determine $\exp(At)$;
c) Encontre a representação entrada-saída na forma de função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

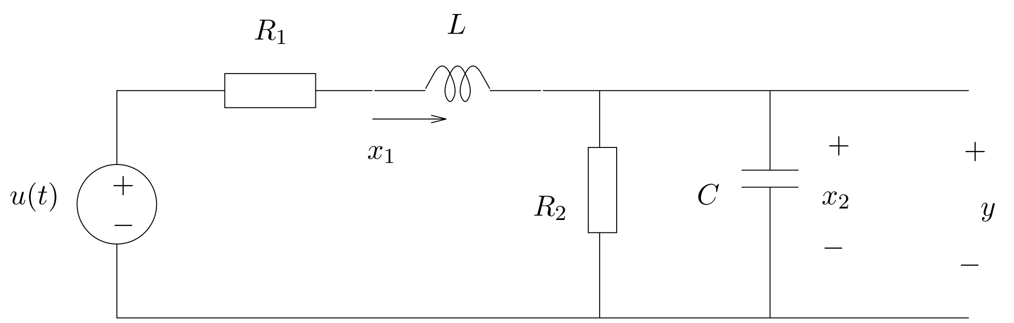
e a resposta ao impulso $g(t)$ associada.

E43: Considere $G(t,\tau)$ a matriz resposta ao impulso de um sistema linear relaxado, isto é, cada elemento de $G(t,\tau)$ é, por definição, a saída devido a uma entrada impulsiva δ aplicada no instante τ. Em termos de $G(t,\tau)$, qual é a condição para que o sistema seja:

a) Causal

b) Invariante no tempo

E44: Considere o circuito abaixo, com $x_1 \triangleq$ corrente no indutor; $x_2 \triangleq$ tensão no capacitor; $R_1 = 2.6\ \Omega$; $R_2 = 10\ \Omega$; $C = 1$ F e $L = 1$ H.



a) Obtenha a representação por equações de estado, na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ \\ y = Cx + Eu \end{cases}$$

b) Determine $\exp(At)$

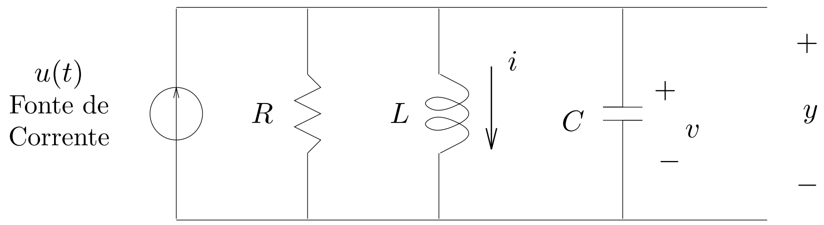
c) Considerando $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix}'$, obtenha a resposta à entrada nula $y_{en}(t)$

d) Obtenha a Função de Transferência $g(s) \triangleq \dfrac{y(s)}{u(s)}$

e) Determine resposta ao impulso $\mathcal{L}^{-1}[g(s)]$

f) Qual seria a função de transferência se a saída fosse a corrente no indutor?

E45: Considere o circuito abaixo.



a) Obtenha a equação diferencial que descreve o comportamento do circuito em termos da corrente no indutor.

b) Considere $x_1 \equiv$ corrente no indutor e $x_2 \equiv$ tensão no capacitor. Obtenha as equações dinâmicas do circuito (estado e saída) na forma matricial.

c) Para $L = 1/6H$, $R = 0.2\Omega$ e $C = 1F$, obtenha $x(t)$ para entrada $u(t) = 0$ e condição inicial

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Obtenha a função de transferência $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$.

e) Obtenha a resposta ao impulso do circuito.

f) Obtenha a resposta ao degrau.

g) Qual seria a função de transferência se a saída do circuito fosse a corrente no indutor ?

E46: Encontre a matriz fundamental e a matriz de transição de estados da seguinte equação homogênea

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} x$$

E47: Encontre a solução de

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x$$

com $x(0)' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \geq 0$.

E48: Mostre que

a) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau)$;

b) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \tau}(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)A(\tau)$;

E49: A equação $\dot{z} = -A^*(t)z$ é chamada de equação adjunta de $\dot{x} = A(t)x$, sendo que A^* é a matriz complexa conjungada transposta de A. Sejam $\Phi(t, t_0)$ e $\Phi_a(t, t_0)$ as matrizes de transição de $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{z} = -A^*(t)z$, respectivamente. Verifique que

$$\Phi_a(t, t_0) = \Phi^*(t_0, t)$$

E50: Considere a equação dinâmica

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$y = C(t)x$$

e sua equação adjunta

$$\dot{z} = -A^*(t)z + C^*(t)v$$

$$w = B^*(t)z$$

Sejam $G(t, \tau)$ e $G_a(t, \tau)$ as respectivas matrizes de resposta ao impulso. Mostre que

a) $G(t, \tau) = G_a^*(\tau, t)$;

b) Se A, B e C são matrizes constantes, então $\hat{G}(s) = -\hat{G}_a^*(-s)$.

E51: Verifique que $X(t) = \exp(At)C\exp(Bt)$ é a solução de

$$\frac{d}{dt}X = AX + XB\ , \qquad X(0) = C$$

E52: Considere a equação do movimento harmônico

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

sendo que ω é uma constante positiva.

a) Encontre a representação do sistema na forma $\dot{x} = Ax$;

b) Caracterize a matriz de transição $\Phi(t) = \exp(At)$ através de Série de Potências. Em particular, mostre que se k é par, então $A^k = (-1)^{(k/2)}\omega^k\mathbf{I}$

E53: Verifique se as seguintes equações dinâmicas são controláveis.

a) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

b) $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u$

E54: Mostre que uma equação dinâmica é controlável em t_0 se e somente se existe um tempo finito $t_1 > t_0$ tal que, para qualquer x_0 existe u que transfere x_0 para o estado *zero* no tempo t_1. [sugestão: use a não singularidade da matriz de transição de estados]

E55: Verifique se a seguinte equação dinâmica é controlável e/ou observável.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

E56: Reduza a equação dinâmica a uma forma controlável

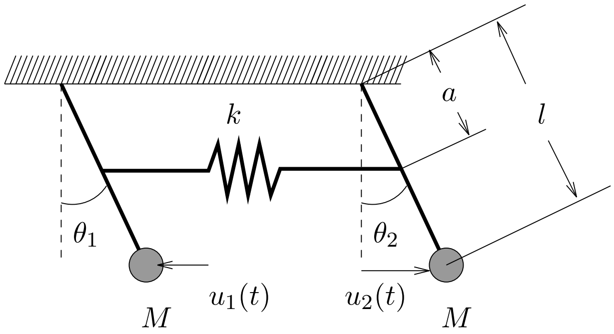
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Encontre também a função de transferência associada.

E57: Mostre que o par (A, C) é observável se e somente se o par (A, C^*C) for observável.

E58: Considere o sistema de pêndulos acoplados mostrado abaixo:



As equações do movimento do sistema são

$$\ddot{\theta}_1 = -\alpha\,(\theta_1 - \theta_2) - \beta\theta_1 - \gamma u_1(t)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\alpha\,(\theta_2 - \theta_1) - \beta\theta_2 + \gamma u_2(t)$$

sendo que α, β e γ são constantes que dependem de M, l, k, a e g (aceleração da gravidade).

a) Defina $x_1 \triangleq \theta_1$, $x_2 \triangleq \dot{\theta}_1$, $x_3 \triangleq \theta_2$ e $x_4 \triangleq \dot{\theta}_2$ e encontre a representação do sistema na forma

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

b) Caso $u_1(t) = u_2(t)$, $\forall\, t$, (ou seja, uma única variável de controle), verifique se o par (A, B) é controlável;

c) Refaça o item anterior para $u_2(t) = 0$, $\forall\, t$.

E59: Considere o sistema dinâmico

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Encontre:

a) A forma canônica controlável;
b) A forma canônica observável;
c) A função de transferência.

E60: Considere o sistema descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.75 & -0.25 \\ -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix} x$$

a) O sistema é controlável?

b) O sistema é observável?

c) Quais os zeros e os pólos do sistema?

d) Qual sua realização mínima (representação de estado com a menor ordem que fornece a mesma função de transferência)?

E61: Seja o sistema dinâmico

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

Encontre o vetor ganho $k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ tal que o sistema realimentado apresente autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$.

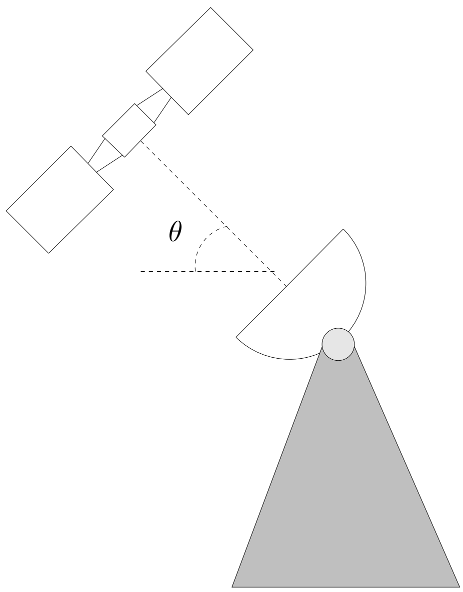
a) Utilizando o algoritmo para alocação de pólos;
b) Diretamente a partir de $\mid A + bk \mid$.

E62: Dados

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

encontre um k tal que $A + bk$ seja similar a $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

E63: Considere o sistema de elevação de uma antena mostrado abaixo.



O movimento da antena pode ser descrito pela equação diferencial

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} = \eta(t) + \eta_a(t)$$

com

θ : posição angular da antena;
J : momento de inércia;
B: coeficiente de atrito viscoso;
η: torque produzido pelo motor;
η_a: torque produzido pelo vento.

O torque produzido pelo motor é proporcional à tensão aplicada aos seus terminais de entrada, isto é,

$$\eta(t) = \beta u(t)$$

sendo que β é a constante de proporcionalidade.

a) Defina $x_1 \triangleq \theta$ e $x_2 \triangleq \dot{\theta}$, e obtenha a representação de estado do sistema para

$$\alpha = \frac{B}{J} = 5 \text{ s}^{-1} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{\beta}{J} = 1 \text{ m N s}^2$$

e $J = 10$ Kg m^2. Mostre que o par (A, B) resultante é controlável. Despreze o torque produzido pelo vento;

b) Encontre o ganho de realimentação que aloca os autovalores do sistema em malha fechada em -3;

c) Defina a saída do sistema como a posição angular da antena, e mostre que o par (A, C) é observável. Em seguida, obtenha um estimador de ordem completa para o sistema. Aloque os autovalores do estimador em -9;

d) Construa um estimador de ordem reduzida de forma a observar a velocidade angular da antena. Aloque o autovalor do estimador em -9.

E64: Demonstre a seguinte afirmação: dado um sistema linear invariante no tempo, se o par (A, C) é observável, então o seu estado pode ser estimado através de

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + Ly + Bu$$

com o erro de estimativa $\tilde{x} = x - \hat{x}$ governado por

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

e todos os autovalores de $(A - LC)$ podem ser arbitrariamente alocados.

E65: Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

sendo que $x \in \Re^n$, $u \in \Re^q$ e $y \in \Re^p$. Várias propriedades importantes podem ser conseguidas com leis de controle do tipo

$$u = -Kx + Fv$$

sendo que $v \in \Re^q$, K é o ganho de realimentação de estados e F é um ganho de alimentação *feedforward*. Em particular, leis deste tipo podem ser utilizadas para *desacoplar* o sistema: se $q = p$ então, sob certas condições, a matriz de tranferência $\hat{G}(s)$ $(q \times q)$, de v para y, é uma matriz diagonal, não-singular, de forma que cada saída é afetada por uma única entrada. Suponha então que $q = p$ e

a) Obtenha a matriz de transferência $\hat{G}(s)$;

b) Mostre que o sistema é desacoplado se todas as matrizes

$$C\,[A-BK]^i\,BF, \qquad i=0,1,\ldots,n-1$$

forem diagonais.

Dica: Anti-transforme $\hat{G}(s)$ e aplique o Teorema de Cayley-Hamilton a $\exp\,[(A-BK)t]$.

E66: Considere o sistema abaixo:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 6 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

a) Determine a lei de realimentação de estados, isto é,

$$u=-Kx$$

que aloque os autovalores do sistema em -1, $-1+j$ e $-1-j$

Quando não se tem acesso completo aos estados do sistema para realimentação, uma alternativa ao uso de estimadores de estado é a utilização direta da saída do sistema realimentada por um ganho constante (realimentação estática de saída), isto é, uma lei de controle dada por

$$u=-Fy$$

b) Determine, se possível, uma realimentação de saída que realize a mesma alocação de autovalores do item a)

c) Determine, se possível, uma realimentação de saída que aloque os autovalores do sistema em -1, -2 e -3.

E67: Considere o sistema abaixo:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 10 & 9 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

a) Obtenha uma transformação de similaridade P que coloque a saída na forma

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}=\bar{x}_1$$

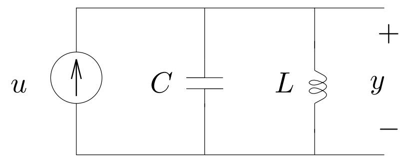
b) Determine um estimador de ordem reduzida para o estado $\bar{x}_2$

Dica: o estimador de ordem reduzida é descrito por

$$\dot{z}=\left(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}\right)z+\left[\left(\bar{A}_{22}-\bar{L}\bar{A}_{12}\right)\bar{L}+\left(\bar{A}_{21}-\bar{L}\bar{A}_{11}\right)\right]y+\left(\bar{B}_2-\bar{L}\bar{B}_1\right)u$$

$$\hat{\bar{x}}=\begin{bmatrix} y \\ z+\bar{L}y \end{bmatrix}, \qquad \hat{x}=P^{-1}\hat{\bar{x}}=Q\hat{\bar{x}}$$

E68: Verifique se o circuito LC mostrado abaixo é BIBO-estável ou não. Caso não seja, encontre uma entrada limitada que gere uma saída ilimitada (Obs.: $L=1$ H e $C=1$ F).



E69: Encontre a representação por variáveis de estado do sistema dinâmico descrito na figura do exercício anterior. Encontre o(s) estado(s) de equilíbrio da equação e verifique se o(s) mesmo(s) satisfaz(em) as definições de estabilidade e estabilidade assintótica no sentido de Lyapunov.

E70: Considere a equação dinâmica

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

a) Encontre todos os estados de equilíbrio da equação;
b) Verifique se cada estado é estável no sentido de Lyapunov;
c) Idem, para estabilidade assintótica;
d) A resposta ao estado nulo é BIBO-estável?;

E71: Verifique se um sistema com função de transferência

$$\frac{2s^2 - 1}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 2s + 2}$$

é BIBO-estável.

E72: Encontre as faixas de k_1 e k_2 tais que o sistema com função de transferência

$$\frac{s + k_1}{s^3 + 2s^2 + k_2 s + 4}$$

é BIBO-estável.

E73: Considere a equação de estado controlável invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Mostre que se $u = -B^* W^{-1}(T)x$, com

$$W(T) = \int_0^T \exp(-A\tau)BB^* \exp(A^*\tau)d\tau \ , \qquad T > 0$$

então o sistema realimentado é assintoticamente estável. Mostre ainda que

$$V(x(t)) = x^*(t)W^{-1}(T)x(t)$$

é uma função de Lyapunov adequada para o sistema realimentado.

E74: Sob que condições a solução de $AM + MB = -N$ pode ser expressa como

$$M = \int_0^\infty \exp(At)N\exp(Bt)dt \ \ ?$$

E75: Os critérios de Lyapunov e Routh-Hurwitz fornecem apenas informação sobre estabilidade *absoluta* (estável/instável) a respeito de um determinado sistema dinâmico. Os itens a) e b) a seguir são exemplos de como os critérios originais podem ser manipulados de forma a oferecer informação sobre estabilidade *relativa* (ou seja, *quão* estável) sobre o mesmo sistema. Considere então as descrições do sistema linear invariante no tempo genérico:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu & A \in \Re^{n\times n} \quad ; \quad b \in \Re^{n\times 1} \\ y = cx & c \in \Re^{1\times n} \end{cases}$$

$$G(s) = c(s\mathbf{I} - A)^{-1}b = \frac{N(s)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

a) Mostre que se existem matrizes hermitianas M e N definidas positivas tais que

$$A^*M + MA + 2\alpha M = -N$$

então todos os autovalores de A têm parte real menor do que $-\alpha$;

b) Mostre que o critério de Routh-Hurwitz pode ser usado para assegurar que os pólos de $G(s)$ tenham parte real menor do que $-\alpha$;

c) Use o item b) para verificar se as raízes de

$$s^4 + 14s^3 + 71s^2 + 154s + 120 = 0$$

têm parte real menor do que -1.

E76: Considere a equação dinâmica

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Verifique, justificando sua resposta, se:

a) O estado nulo da equação é assintoticamente estável;

b) Se a resposta ao estado nulo da equação é BIBO-estável;

E77: Sabe-se que a equação dinâmica

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

é BIBO-estável. É possível então concluir que a parte real de λ é negativa ? Justifique sua resposta.

E78: Considere a equação dinâmica de segunda ordem homogênea

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 \\ c_1 & 0 \end{bmatrix} x$$

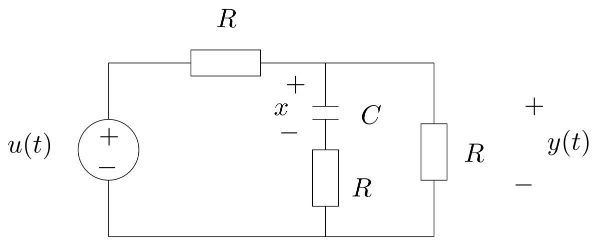
Analise a estabilidade do estado nulo em função das constantes c_1 e c_2, por hipótese, diferentes de zero. Existem valores de c_1 e c_2 para os quais a equação dinâmica é assintoticamente estável ?

E79: Um sistema linear invariante no tempo, relaxado em $t_0 = 0$, é BIBO-estável se

$$\int_0^{\infty} \mid g(\tau) \mid d\tau < \infty$$

sendo que $g(t) \in \Re$ é a resposta ao impulso do sistema.

Considere o circuito abaixo, com $R = 1\ \Omega$ e $C = 1$ F.



a) Determine as equações de estado do circuito na forma padrão

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Eu$$

b) Determine a função de transferência

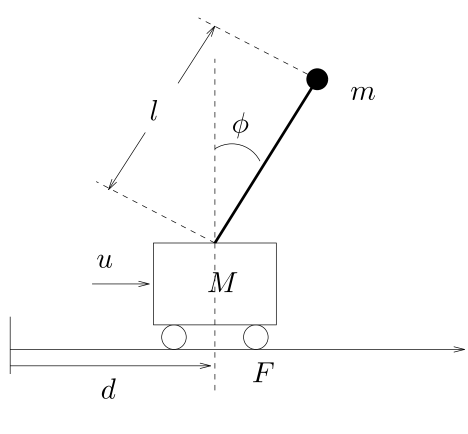
$$g(s) \triangleq \frac{y(s)}{u(s)}$$

c) O sistema é BIBO-estável?

d) Se possível, determine $k > 0$ tal que

$$\int_0^{\infty} \mid g(\tau) \mid d\tau < k$$

E80: Considere o problema de um pêndulo invertido equilibrado pelo movimento de um carro:



As equações de estado do movimento, após linearização, são dadas por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -g/L & 0 & g/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1/L & 0 & 1/L & 0 \end{bmatrix} x$$

nas quais M é a massa do carro, m é a massa do pêndulo (por hipótese, $M \gg m$), F é o coeficiente de atrito do carro, g é a aceleração da gravidade, l é o comprimento do pêndulo e $L \triangleq (J + ml^2)/ml$, com J igual ao momento de inércia do pêndulo (todos parâmetros positivos). A entrada u é a força aplicada no carro, e o vetor de estados foi definido como

$$x = \begin{bmatrix} d & \dot{d} & (d + L\phi) & \dot{d} + (L\dot{\phi}) \end{bmatrix}'$$

sendo que d é o deslocamento do carro e ϕ o ângulo formado pelo pêndulo com a vertical.

Uma escolha alternativa para o vetor de estados, dada por

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \dot{d} & L\phi & L\dot{\phi} & d \end{bmatrix}'$$

leva a uma descrição equivalente do sistema, colocando em evidência os modos observáveis/não observáveis. O sistema transformado assume a forma

$$\dot{\bar{x}} = \left[\begin{array}{ccc|c} -F/M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ F/M & g/L & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{x} + \left[\begin{array}{c} 1/M \\ 0 \\ -1/M \\ \hline 0 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1/L & 0 & 0 \end{array}\right] \bar{x}$$

a) O sistema é assintoticamente estável? Justifique.

b) Calcule o denominador da função de transferência. O sistema é BIBO estável? Justifique

E81: Considere o sistema linear dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

a) Investigue a estabilidade do sistema autônomo pelo método de Lyapunov.

Dica: Use $v(x) = x'Px$ como função de Lyapunov, com $P = P'$ solução da equação

$$A'P + PA + 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

b) Sabendo que a entrada de controle está sujeita à restrição

$$u(t)'u(t) \leq 1 \quad , \quad \forall\, t$$

escolha $u(t)$ de maneira a forçar $\dot{v}$ a ser tão negativa quanto possível, para que o sistema, partindo de uma condição inicial qualquer, atinja rapidamente a origem.

Dica: Dado um vetor $y(t)$ (vetor com m componentes funções de t), tem-se que:

$$\min_{z(t)'z(t) \leq 1 \;,\; \forall t} \quad z(t)'y(t) \qquad \Longrightarrow \qquad z^*(t) = \frac{-y(t)}{\|y(t)\|}$$

$$\|y(t)\| \triangleq \sqrt{y_1^2(t) + y_2^2(t) + \cdots + y_m^2(t)}$$

E82: Considere a função de transferência de um sistema linear dada por

$$g(s) = \frac{2s^2 + k_1}{s^3 + 5s^2 + 2s + k_2}$$

Determine os intervalos para os parâmetros reais k_1 e k_2 para que o sistema seja BIBO estável

E83: Considere o sistema dado por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -62 & -66 & -37 & -10 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

a) Determine a função de transferência $g(s) \triangleq \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

b) O sistema é BIBO estável? Justifique.

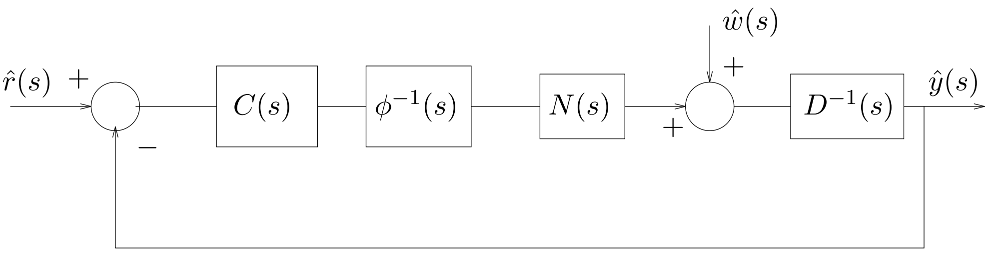
c) O sistema é assintoticamente estável? Justifique.

E84: Verifique se os polinômios $N(s) = s^3 + s^2 - s + 2$ e $D(s) = 2s^3 - s^2 + s + 1$ são coprimos. Obtenha a forma irredutível, caso os polinômios não sejam coprimos.

E85: Dada a planta $\hat{g}(s) = (s-1)/s(s-2)$, encontre um compensador $C(s)$ tal que os pólos do sistema em malha fechada estejam localizados em -1, -2 e -3.

E86: Dada a planta $\hat{g}(s) = (s^2-1)/(s^2-3s+1)$, encontre um compensador próprio $C(s)$, de grau 1, tal que os pólos do sistema de malha fechada estejam localizados em -1, -2 e -3. Em seguida, encontre um compensador estritamente próprio $C(s)$, de grau 2, tal que os pólos do sistema em malha fechada estejam localizados em -1, -2, -3 e -4.

E87: Considere o sistema de controle mostrado na figura abaixo



sendo que $\hat{r}(s) = 1/s^2$, $\hat{w}(s) = 1/s$ e $\hat{g}(s) = (10-s)/(s+10)$. Projete um compensador próprio $C(s)$, de grau 2, tal que o *compensador por modelo interno* $\widetilde{C}(s) = C(s)\phi(s)^{-1}$ assegure

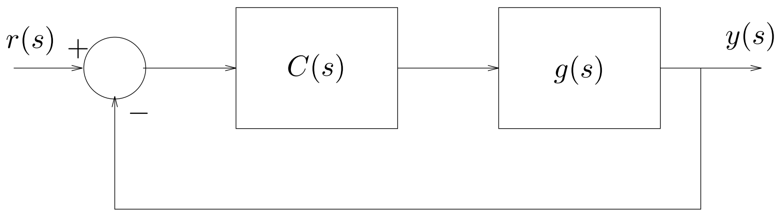
a) Estabilidade assintótica, com pólos de malha fechada em $-2 \pm j2$, -3, -4 e -5;

b) Rastreamento assintótico de $r(t)$;
c) Rejeição do distúrbio $w(t)$.

E88: Considere o sistema linear descrito pela função de transferência

$$g(s) = \frac{s^2 - 1}{3s^2 + 5s + 4}$$

e o esquema de realimentação unitária mostrado na figura abaixo.



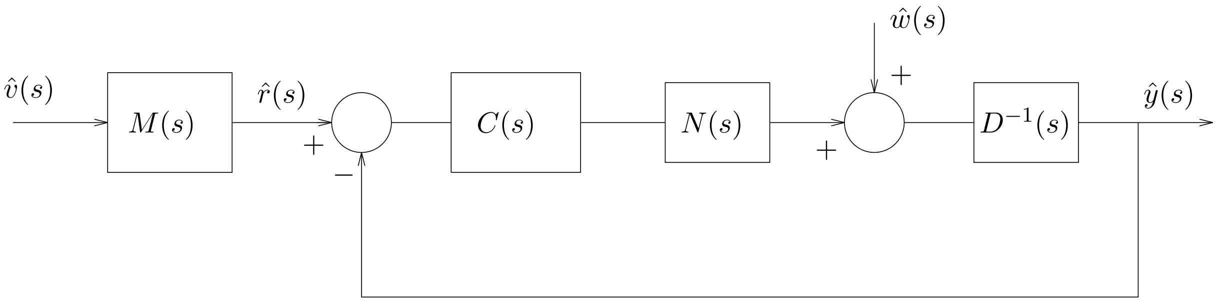
Obtenha (se possível) os seguintes controladores:

a) $C(s) \triangleq k = \dfrac{N_{c0}}{D_{c0}}$ alocando os pólos do sistema em malha fechada em -2 e -3

b) $C(s)$ próprio, alocando os pólos em -2, -3 e -4

c) $C(s)$ estritamente próprio, alocando os pólos em -2, -3, -4 e -5

E89: Considere o sistema de controle mostrado na figura abaixo



sendo que $M(s) = 1/(s+1)$ é um *modelo de referência*, $N(s) = (10 - s)$ e $D(s) = (10 + s)$ são respectivamente o numerador e o denominador da planta a ser controlada. Projete um compensador por modelo interno $C(s)$, de forma que a saída da planta siga assintoticamente a saída do modelo de referência, rejeitando a perturbação que atua sobre o sistema e alocando os pólos de malha fechada em -1, -2 e -3. Considere $\hat{v}(s)$ e $\hat{w}(s)$ degraus unitários.