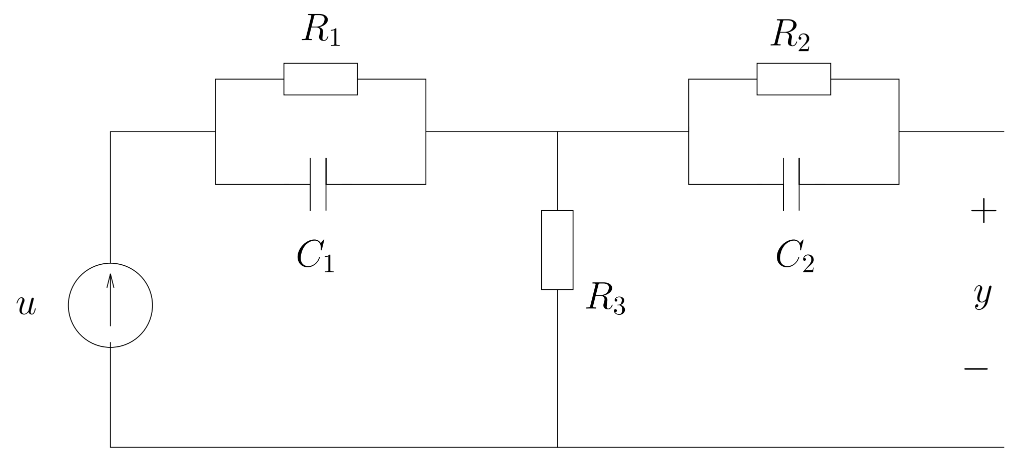
Controlabilidade e Observabilidade



- A tensão no capacitor C_2 não pode ser controlada pela entrada u;
- A tensão no capacitor C_1 pode ser controlada pela entrada u;
- A tensão no capacitor C_2 pode ser observada pela saída y;
- A tensão no capacitor C_1 não pode ser observada pela saída y.

Observabilidade

Conceito dual à controlabilidade.

Considere a equação dinâmica de dimensão n, p entradas e q saídas

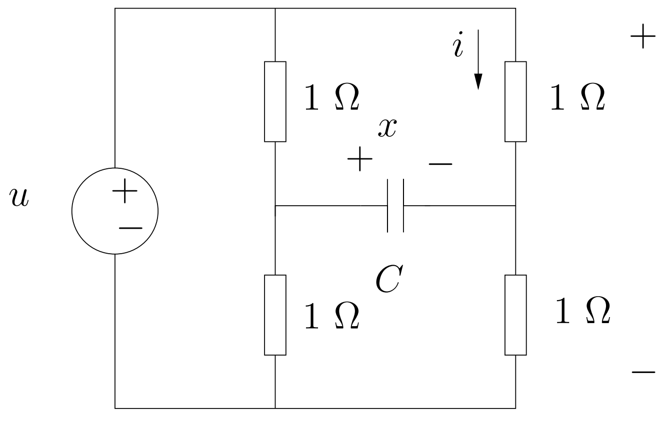
$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q\times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$

A equação de estado acima ou o par (A, C) é **observável** se, para qualquer estado inicial $x(0)$, existir um tempo finito t_1 tal que o conhecimento da entrada u e da saída y no intervalo $[0, t_1]$ seja suficiente para se determinar de maneira única $x(0)$.

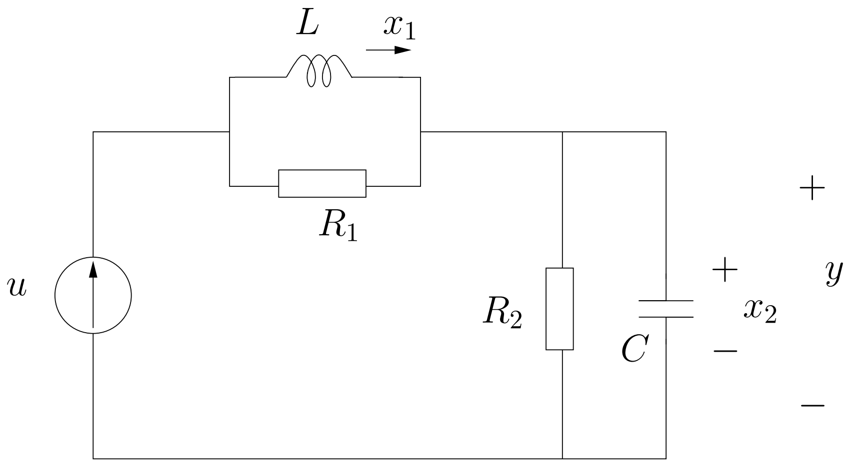
Exemplo:



Se a entrada é fixa, a saída y é sempre fixa independentemente da tensão inicial no capacitor.

O sistema não é observável.

Exemplo:



Variáveis de estado: corrente no indutor x_1 e tensão no capacitor x_2

Se $u = 0$, $x_1(0) = x_{10} \neq 0$ e $x_2(0) = 0$, a saída $y = x_2$ é igual a zero. Qualquer condição inicial $x(0) = [\ a\ 0\ ]'$ com $u = 0$ produz a mesma saída $y = 0$.

Não é possível determinar o estado inicial (não observável).

A saída do sistema para uma condição inicial $x(0)$ e uma entrada $u(t)$ é dada por

$$y(t) = C\exp(At)x(0) + C\int_0^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau \ + \ Du(t)$$

Assumindo y e u conhecidos, a única incógnita é $x(0)$. Portanto

$$C\exp(At)x(0) = \bar{y}$$

$$\bar{y} \triangleq y(t) - C\int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau - Du(t)$$

Estudar a observabilidade resume-se a obter $x(0)$ a partir de $u(t)$ e $y(t)$. Se $u \equiv 0$, a saída $\bar{y}(t)$ reduz-se a (resposta à entrada nula)

$$y(t) = C \exp(At)x(0)$$

Um sistema é observável se e somente se o estado inicial $x(0)$ pode ser determinado de maneira única a partir da resposta à entrada nula durante um intervalo de tempo.

Note que para um t fixo, com $q < n$, a matriz $C \exp(At)$ tem rank no máximo igual a q e, conseqüentemente, nulidade $n - q$ ou maior, e as soluções não são únicas.

Teorema

O sistema é observável se e somente se a matriz $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A'\tau)C'C \exp(A\tau)d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$.

Prova: Pré-multiplicando $C \exp(At)x(0) = \bar{y}(t)$ por $\exp(A't)C'$ e integrando no intervalo $[0, t_1]$ tem-se

$$\left(\int_0^{t_1} \exp(A't)C'C \exp(At)dt \right) x(0) = \int_0^{t_1} \exp(A't)C'\bar{y}(t)dt$$

Se $W_o(t_1)$ é não singular, $x(0)$ único é dado por

$$x(0) = W_o^{-1}(t_1) \int_0^{t_1} \exp(A't)C'\bar{y}(t)dt$$

Isso mostra que se $W_o(t)$ é não singular para qualquer $t > 0$ então o sistema é observável.

Agora, mostra-se que se $W_o(t_1)$ é singular (ou, equivalentemente, semidefinda positiva) para todo $t_1 > 0$, então o sistema não é observável.

Se $W_o(t_1)$ é semidefinda positiva, existe $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ não nulo tal que

$$\begin{aligned} v' W_o(t_1) v &= \int_0^{t_1} v' \exp(A't) C' C \exp(At) v dt \\ &= \int_0^{t_1} \|C \exp(At) v\|^2 dt = 0 \end{aligned}$$

o que implica $C \exp(At) v \equiv 0$ para todo $t \in [0, t_1]$. Se $u \equiv 0$, as condições iniciais $x_1(0) = v \neq 0$ e $x_2(0) = 0$ produzem a mesma saída

$$y(t) = C \exp(At) x_1(0) = C \exp(At) x_2(0) \equiv 0$$

e portanto o sistema não é observável.

Teorema (Dualidade)

O par (A, B) é controlável se e somente se o par (A', B') for observável.

Prova: (A, B) controlável se e somente se

$$W_c(t) = \int_0^t \exp(A\tau) B B' \exp(A'\tau) d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$. O par (A', B') é observável se e somente se, trocando A por A' e C por B'

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A\tau) B B' \exp(A'\tau) d\tau$$

for não singular para qualquer $t > 0$.

• Observabilidade: depende apenas de (A, C)

Teorema: as afirmações abaixo são equivalentes.

1) O par (A, C) é observável.

2) A matriz $n \times n$

$$W_o(t) = \int_0^t \exp(A'\tau)C'C\exp(A\tau)d\tau$$

é não-singular $\forall\ t > 0$.

3) A matriz de observabilidade $nq \times n$ (comando `obsv` no Matlab)

$$\mathfrak{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tem rank n (rank completo de colunas).

4) A matriz $(n+q) \times n$

$$\begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I} - A \\ C \end{bmatrix}$$

tem rank n (rank completo de colunas) para todo autovalor λ de A (coprimas à direita).

5) Se todos os autovalores de A têm parte real negativa, a solução única de

$$A'W_o + W_oA = -C'C$$

é definida positiva. Essa solução é chamada de **Gramiano de observabilidade** e pode ser expressa como

$$W_o = \int_0^\infty \exp(A'\tau)C'C\exp(A\tau)d\tau$$

Índices de Observabilidade

Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ com C de rank completo de linhas (se não for o caso, alguma linha redundante pode ser eliminada).

Se (A, C) for observável, a matriz de observabilidade $\mathfrak{O}$ tem rank n e, conseqüentemente, n linhas linearmente independentes (de um total de nq linhas).

Seja c_i a i-ésima linha de C. De maneira dual à controlabilidade, se uma linha associada a c_m torna-se linearmente dependente, todas as demais linhas subseqüentes também o serão. Seja ν_m o número de linhas LI associadas a c_m. Se $\mathfrak{O}$ tem rank n,

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q = n$$

$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\}$ são índices de observabilidade e

$$\nu = \max \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\}$$

é o **índice de observabilidade** de (A, C).

Se (A, C) é observável, o índice de observabilidade ν é o menor inteiro tal que

$$\rho(\mathfrak{O}_\nu) = \rho(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix}) = n$$

- O intervalo para ν é dado por

$$n/q \leq \nu \leq \min\,(\bar{n}, n - q + 1) \qquad q = \text{rank}\,(C)$$

sendo $\bar{n}$ o grau do polinômio mínimo de A.

Corolário: O par (A, C) com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\rho(C) = q$ é observável se e somente se a matriz

$$\mathfrak{O}_{n-q+1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-q} \end{bmatrix}$$

tiver rank n.

Teorema: A observabilidade é invariante sob qualquer transformação de equivalência.

Teorema: O conjunto de índices de observabilidade do par (A, C) é invariante sob qualquer transformação de equivalência e para qualquer re-ordenamento das linhas de C.

- Diferenciando $C \exp(At)x(0) = \bar{y}(t)$ e tomando $t = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\nu-1} \end{bmatrix} x(0) = \mathfrak{O}_\nu x(0) = \tilde{y}(0) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{y}(0) \\ \dot{\bar{y}}(0) \\ \vdots \\ \bar{y}^{(\nu-1)}(0) \end{bmatrix}$$

Uma solução $x(0)$ existe se $\tilde{y}(0)$ estiver no range de $\mathfrak{O}_\nu$. Se (A, C) é observável, $\mathfrak{O}_\nu$ tem rank completo de colunas e a solução é única.

$$x(0) = [\mathfrak{O}'\mathfrak{O}]^{-1}\mathfrak{O}'\tilde{y}(0)$$

Note que para a determinação do vetor $\tilde{y}(0)$ (contendo as derivadas) é necessário o conhecimento de $\bar{y}(t)$ na vizinhança de $t = 0$.

Sistemas Equivalentes

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Seja $\bar{x} = Px$ com P não singular. Então

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} \;\; ; \;\; \bar{B} = PB \;\; ; \;\; \bar{C} = CP^{-1} \;\; ; \;\; \bar{D} = D$$

é um sistema equivalente.

$$(A, B) \text{ controlável } \iff (\bar{A}, \bar{B}) \text{ controlável}$$

$$(A, C) \text{ observável } \iff (\bar{A}, \bar{C}) \text{ observável}$$

• Todas as propriedades (estabilidade, controlabilidade e observabilidade) são preservadas pela transformação de equivalência.

• As matrizes de controlabilidade e de observabilidade se relacionam da seguinte forma

$$\bar{\mathfrak{C}} = P\mathfrak{C} \;\; ; \;\; \bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}P^{-1}$$

Decomposição Canônica

Teorema

Considere um sistema de dimensão n com

$$\rho(\mathfrak{C}) = \rho(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}) = n_1 < n$$

e forme a matriz $n \times n$

$$P^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & q_{n_1} & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

cujas primeiras n_1 colunas são quaisquer n_1 colunas LI de $\mathfrak{C}$ e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que P seja não singular.

A transformação de equivalência $\bar{x} = Px$ transforma o sistema em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_c \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + Du$$

com $\bar{A}_c \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ e $\bar{A}_{\bar{c}} \in \mathbb{R}^{(n-n_1)\times(n-n_1)}$.

A sub-equação de dimensão n_1

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_c &= \bar{A}_c \bar{x}_c + \bar{B}_c u \\ \bar{y} &= \bar{C}_c \bar{x}_c + Du \end{aligned}$$

é controlável e tem a mesma matriz de transferência do sistema original.

Prova: A transformação $x = P^{-1}\bar{x}$ realiza uma mudança de representação do estado da base ortonormal para a base $Q \triangleq P^{-1} = \{q_1, \ldots, q_{n_1}, \ldots, q_n\}$. A i-ésima coluna de $\bar{A}$ é a representação de Aq_i na base $\{q_1, \ldots, q_{n_1}, \ldots, q_n\}$. Para $i = 1, \ldots, n_1$, os vetores Aq_i são LD no conjunto $\{q_1, \ldots, q_{n_1}\}$ e são LI em $\{q_{n_1+1}, \ldots, q_n\}$, o que explica a forma da matriz $\bar{A}$.

As colunas de $\bar{B}$ são a representação das colunas de B em relação à base $\{q_1, \ldots, q_{n_1}, \ldots, q_n\}$. Mas as colunas de B dependem apenas de $\{q_1, \ldots, q_{n_1}\}$, o que explica a forma de $\bar{B}$. Note que se $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tem rank p e se suas colunas são escolhidas como as primeiras p colunas de P^{-1}, então a parte superior de $\bar{B}$ será a matriz identidade de ordem p.

Seja $\mathfrak{C}$ a matriz de controlabilidade de (A, B). Então, tem-se $\rho(\mathfrak{C}) = \rho(\bar{\mathfrak{C}}) = n_1$ e pode-se verificar que

$$\bar{\mathfrak{C}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n_1}\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c} \bar{\mathfrak{C}}_c & \bar{A}_c^{n_1}\bar{B}_c & \cdots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \} \; n_1 \text{ linhas} \\ \} \; n - n_1 \text{ linhas} \end{array}$$

sendo $\bar{\mathfrak{C}}_c$ a matriz de controlabilidade do par $(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$. Como as colunas de $\bar{A}_c^k\bar{B}_c$, para $k \geq n_1$, são LD das colunas de $\bar{\mathfrak{C}}_c$, a condição $\rho(\mathfrak{C}) = n_1$ implica $\rho(\bar{\mathfrak{C}}) = n_1$ e portanto a equação de dimensão n_1 é controlável.

Resta mostrar que a equação de dimensão n_1 tem a mesma função de transferência do sistema original. Como a transformação de equivalência não altera a função de transferência, basta mostrar que a função de transferência do sistema de dimensão n_1 é igual à do sistema transformado.

Note que

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} & M \\ \mathbf{0} & \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

com

$$M = \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} \bar{A}_{12} \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1}$$

e portanto a matriz de transferência do sistema transformado é

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + D =$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} & M \\ \mathbf{0} & \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_{\bar{c}}\right)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + D$$

$$= \bar{C}_c \left(s\mathbf{I} - \bar{A}_c\right)^{-1} \bar{B}_c + D$$

- Decomposição do espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_c \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\downarrow \\ \text{controlável; dimensão } n_1}} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \bar{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix}}^{\substack{\text{não-controlável; dimensão } n - n_1 \\ \uparrow}}$$

Exemplo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

rank $(B) = 2 \Rightarrow \mathfrak{C}_2 = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$

$$\rho(\mathfrak{C}_2) = \rho \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 < 3$$

$$P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \bar{x} = Px$$

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad ; \quad \bar{B} = PB = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\bar{C} = CP^{-1} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Sistema de dimensão $n_1 = 2$

$$\dot{\bar{x}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}_c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \; ; \; y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x$$

• A função `ctrbf` transforma o sistema para a forma canônica controlável, mas com as colunas de P^{-1} na ordem inversa, resultando

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{\bar{c}} & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_c \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{B}_c \end{bmatrix}$$

Teorema: Decomposição Canônica — Forma Dual

Considere um sistema de dimensão n com

$$\rho(\mathfrak{O}) = \rho(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}) = n_2 < n$$

e forme a matriz $n \times n$

$$P \triangleq \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n_2} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

cujas primeiras n_2 linhas são quaisquer n_2 linhas LI de $\mathfrak{O}$ e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que P seja não singular. Então, $\bar{x} = Px$ transforma o sistema em

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_o \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_o \\ \bar{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_o & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_o \\ \bar{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + Du$$

$\bar{A}_o \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ e $\bar{A}_{\bar{o}} \in \mathbb{R}^{(n-n_2)\times(n-n_2)}$. A sub-equação de dimensão n_2

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_o &= \bar{A}_o \bar{x}_o + \bar{B}_o u \\ \bar{y} &= \bar{C}_o \bar{x}_o + Du \end{aligned}$$

é observável e tem a mesma matriz de transferência.

Matlab: `obsvf`

Teorema (Decomposição de Kalman)

Toda equação de estado pode ser transformada na forma canônica equivalente

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_{co} \\ \dot{\bar{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{co} & \mathbf{0} & \bar{A}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{c\bar{o}} & \bar{A}_{23} & \bar{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{A}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{A}_{43} & \bar{A}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{co} \\ \bar{x}_{c\bar{o}} \\ \bar{x}_{\bar{c}o} \\ \bar{x}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{co} \\ \bar{B}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_{co} & \mathbf{0} & \bar{C}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{x} + Du$$

$\bar{x}_{co}$: controlável e observável

$\bar{x}_{c\bar{o}}$: controlável e não observável

$\bar{x}_{\bar{c}o}$: não controlável e observável

$\bar{x}_{\bar{c}\bar{o}}$: não controlável e não observável

Equivalente (para estado inicial nulo) à equação de estado controlável e observável

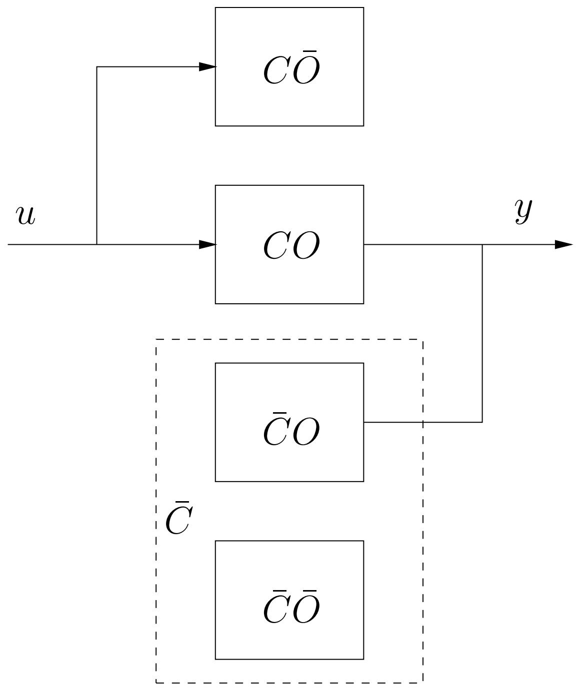
$$\dot{\bar{x}}_{co} = \bar{A}_{co}\bar{x}_{co} + \bar{B}_{co}u$$

$$y = \bar{C}_{co}\bar{x}_{co} + Du$$

com a matriz de transferência

$$G(s) = \bar{C}_{co}(s\mathbf{I} - \bar{A}_{co})^{-1}\bar{B}_{co} + D$$

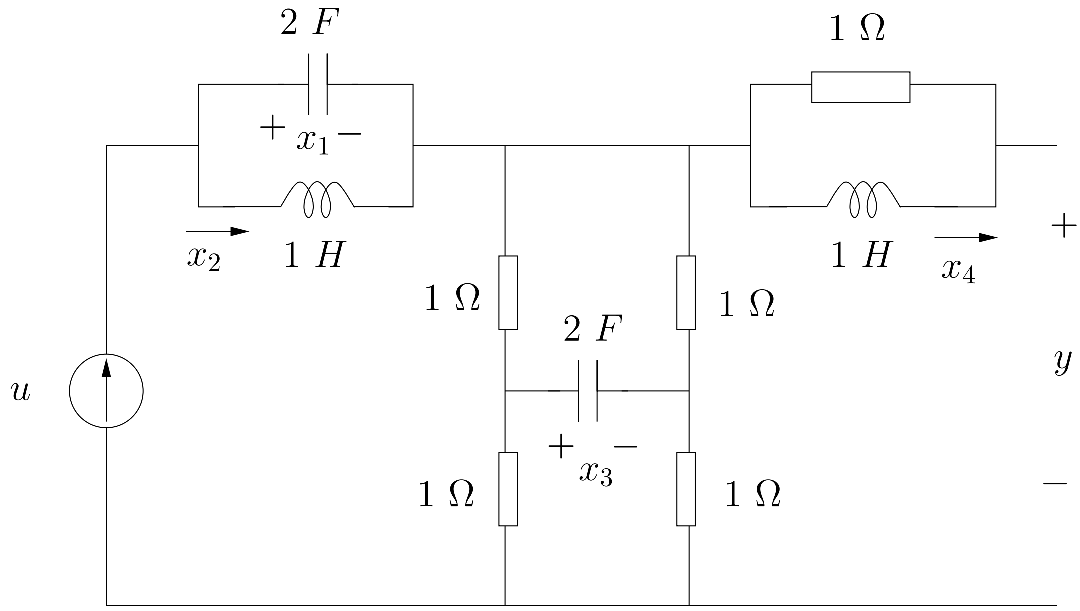
Decomposição de Kalman



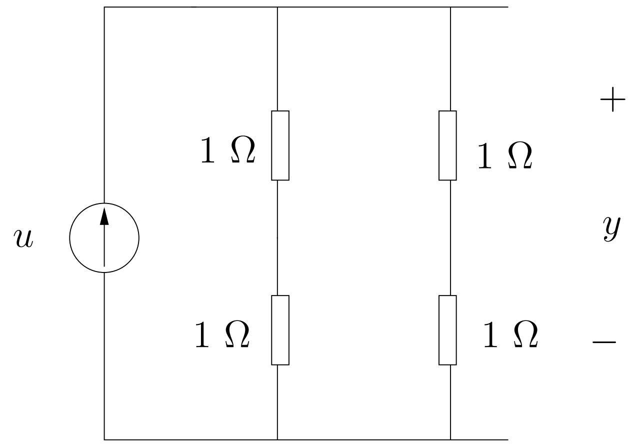
• descrição por função de transferência não é necessariamente equivalente à descrição por equações de estado

Matlab: `minreal` (realização mínima, cancelando pólos e zeros)

Exemplo



Eliminando as variáveis de estado que não são controláveis e/ou não são observáveis:



Função de transferência: $y = u$

Equação de estado do circuito original (forma canônica controlável)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + u$$

Parte controlável

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} x_c + u$$

Exemplo (*Kailath, p. 145*)

Considere o sistema (satélite em órbita equatorial — linearizado)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad ; \quad x' = \begin{bmatrix} r & \dot{r} & \theta & \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

• Estados: posição & velocidade em coordenadas polares
ω velocidade angular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

u_1 : jato radial da turbina
u_2 : jato tangencial da turbina

• Determine se o sistema é controlável:
- Apenas com u_1
- Apenas com u_2

Transforme a realização na forma não controlável padrão, quando apropriado.

Matriz de controlabilidade

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 2\omega^3 \end{bmatrix} \qquad \rho(\mathfrak{C}) = 3$$

coluna 4 = $(-\omega^2 \times)$ coluna 2

Construindo a matriz de transformação equivalente T

$$T = \left[\ b_1 \,\middle|\, Ab_1 \,\middle|\, A^2 b_1 \,\middle|\, t\ \right]$$

t : arbitrário, escolhido para garantir T invertível (por exemplo, ortogonal)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2\omega \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2\omega + 8\omega^3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\omega^2 - 4\omega^4 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 0 & -1 - 4\omega^2 & 0 \\ 4\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 6\omega^3 + 3\omega/2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(1/2\omega) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad ; \quad \bar{b} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Polinômio característico de $\bar{A}$: $s^2(s^2 + \omega^2)$, autovalores: 0, 0 e $\pm j\omega$

Maneira alternativa de construir uma transformação de similaridade T: impor

$$T^{-1}A = \left[\begin{array}{c|c} A_c & A_{12} \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right] T^{-1} \quad , \quad T^{-1}b = \left[\begin{array}{c} b_c \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

λ : autovalor não-controlável

Chamando t_n a última linha de T^{-1}, tem-se

$$t_n A = \lambda t_n \quad , \quad t_n b = 0$$

Por exemplo: $t_n = \left[\, 2\omega \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \,\right]$

As demais linhas podem ser arbitradas:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2\omega & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ -2\omega & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad \bar{b}_1 = T^{-1}b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Autovalor não controlável: $\lambda = 0$

$\rightarrow$ formas canônicas não são únicas

Para $u_1 = 0$ (apenas propulsão tangencial), o sistema é controlável.