1) (1.0)	
2) (1.0)	
3) (1.0)	
4) (1.0)	
5) (1.0)	
6) (1.0)	
7) (1.0)	
8) (1.0)	
9) (1.0)	
10) (1.0)	

P1) ____________

Nome: ....

RA: ....

1ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 9}$ formada por

$$A = \begin{bmatrix} X & -X & 2X \end{bmatrix} \quad , \quad X \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad , \quad \text{rank}(X) = 2$$

a) Qual o rank (posto) de A?

b) Qual a dimensão do espaço nulo de A?

2ª Questão: Determine as soluções do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Considere a base B para o espaço $\mathcal{P}_2$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2 formada pelos vetores $\{1, t^2, t\}$.

a) Encontre a representação β do vetor $p(t) = 2t^2 + 4t - 1$ na base B.

b) Encontre a representação $\bar{\beta}$ do vetor $p(t) = 2t^2 + 4t - 1$ na base $\bar{B} = \{(t-1)^2, t-1, 1\}$.

c) Encontre a matriz de transformação da base B para a base $\bar{B}$, isto é, $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\bar{\beta} = P\beta$

4ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

b) Encontre Q tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

5ª Questão: Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tem como polinômio mínimo $\phi(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Determine as formas de Jordan para A.

6ª Questão: A forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ é dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine o polinômio característico de A

b) Determine o polinômio mínimo de A

c) Determine a multiplicidade geométrica associada ao autovalor $\lambda = 1$

7ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que

$$\exp(At) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 A \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine os valores de α e β para que as matrizes abaixo sejam definidas positivas

a) $A = \begin{bmatrix} \alpha & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -\beta & 0 \\ -\beta & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

9ª Questão: Determine α_0 e α_1 tais que

$$A^{-2} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 A \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

10ª Questão: Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ pertencente ao espaço nulo de A é ortogonal a um vetor $y \in \mathbb{R}^n$ pertencente ao espaço range de A', isto é,

$$x \in \mathcal{N}(A) \ , \ y \in \mathcal{R}(A') \quad \Rightarrow \quad x'y = 0$$