1) (1.0)	
2) (1.0)	
3) (1.0)	
4) (1.0)	
5) (1.0)	
6) (1.0)	
7) (1.0)	
8) (1.0)	

P1) ____________

Nome: ....

RA: ....

1ª Questão: Considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Determine o rank de A

b) Determine a dimensão do espaço nulo de A

c) Obtenha uma base para o range de A

d) Obtenha uma base para o espaço nulo de A

2ª Questão: Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que o sistema linear abaixo possua solução (uma ou mais de uma)

$$\begin{aligned} 2ax_1 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 &= -a \end{aligned}$$

3ª Questão: Considere a transformação linear descrita pela matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a representação da transformação na base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ com

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Encontre a matriz de mudança de base que leva de $\mathcal{V}$ para a base $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ dada por

$$w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Encontre as representações do vetor x

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

nas bases $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$

4ª Questão: Determine as funções $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ que satisfazem a equação

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathbf{I} + \rho_1(t)A$$

sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = -2$$

e λ_1, λ_2 os autovalores de A.

5ª Questão: Sabendo que a forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonal com autovalores positivos, assinale `V` (verdadeiro) ou `F` (falso) para as afirmações abaixo:

a)	A matriz A é necessariamente simétrica.
b)	A matriz A é necessariamente definida positiva.
c)	Os autovalores de A são necessariamente distintos.
d)	Os autovalores de A possuem multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica.
e)	O espaço nulo de $(A - \lambda\mathbf{I})$ possui dimensão n para todo λ autovalor de A.
f)	O polinômio mínimo de A é de grau estritamente menor do que o seu polinômio característico.
g)	Todos os autovetores de A são linearmente independentes.

6ª Questão: Determine $\cosh(A)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pi/4 \\ -\pi/4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = j\pi/4 \ , \ \lambda_2 = -j\pi/4$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e λ_1, λ_2 os autovalores de A.

Obs.: $\cosh(\lambda) = \dfrac{1}{2}(\exp(\lambda) + \exp(-\lambda))$

7ª Questão: Considere $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, cujos elementos são denotados por a_{ij}. Define-se o traço da matriz A como

$$\mathbf{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Mostre que $\mathbf{Tr}(AB) = \mathbf{Tr}(BA)$ para $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

8ª Questão: Mostre que

a) O traço da matriz A é a soma dos autovalores de A

b) O determinante de A é igual ao produto dos seus autovalores