1ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = Av \ \ , \ \ y = cv \ \ , \ \ A = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ , \ c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$y(t) = 3\exp(-3t) - 4t\exp(-3t)$$

2ª Questão: Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ e a matriz de transformação Q tais que $AQ = Q\hat{A}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ \ , \ \ \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

Solução:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \ , \ \ \hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: Considere o sistema (na forma de Jordan)

$$\dot{v} = Av + Bx \ \ , \ \ y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \ , \ \ B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 1 \\ \beta & 1 \\ -4 & \beta \\ 0 & \beta \\ 1 & \beta \\ 2 & \beta \\ \beta & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha & \alpha & -5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

a) Determine os valores de β para os quais o sistema não é controlável

b) Determine os valores de α para os quais o sistema não é observável

Solução:

$$\beta \neq \pm\sqrt{5} \ \ , \ \ \alpha \neq \pm\sqrt{2}$$

4ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} v$$

Conclua sobre a estabilidade assintótica do sistema usando a teoria de Lyapunov (isto é, a partir de uma matriz P solução da equação de Lyapunov)

Solução:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \quad \text{solução de} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, como $P > 0$, pois os menores principais líderes são positivos ($3 > 0$ e $3 - 1 > 0$), o sistema é assintoticamente estável.

5ª Questão: Determine (usando a tabela de Routh ou um dos critérios de estabilidade de polinômios) se os pólos do sistema abaixo estão ou não à esquerda de -1.

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

Solução: O polinômio $D(p) = p^3 + 9p^2 + 26p + 24$ tem raízes à esquerda de -1 se e somente se $D(p-1)$ for Hurwitz, ou seja, se $p^3 + 6p^2 + 11p + 6$ for Hurwitz, o que, pela tabela, ocorre.

6ª Questão: Considere o sistema dado por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad A = \begin{bmatrix} -25 & 16 \\ -49 & 31 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine um ganho de realimentação de estados $x = r - Kv$, $K \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que aloque os autovalores de $A - BK$ em -2 e -3

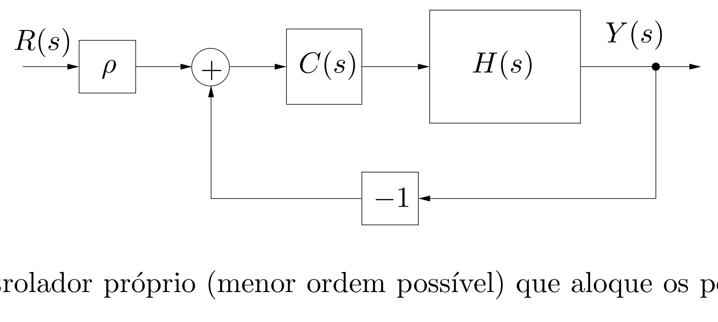
Solução:

$$K = \begin{bmatrix} -25 & 52/3 \\ 1 & -2/3 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Considere o sistema linear descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{3s + 4}{s + 1}$$

e o esquema de realimentação unitária com $\rho = 1$ mostrado na figura



a) Determine um controlador próprio (menor ordem possível) que aloque os pólos em malha fechada em -2

b) Determine um controlador estritamente próprio (menor ordem possível) que aloque os pólos em malha fechada em -2

Solução:

$$\text{a)} \quad C(s) = \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{-2} \quad , \quad \text{b)} \quad C(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} = \frac{1}{s}$$