1ª Questão: Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(4t)x(t)dt, \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = \left(\frac{16-\omega^2}{4}\right) G_8(\omega)$$

$$I = \mathcal{F}\{\text{Sa}(4t)x(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{\text{Sa}(4t)\} * \mathcal{F}\{x(t)\}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{8}G_8(\omega)\right) * \left(\frac{16-\omega^2}{4}\right) G_8(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$I = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty} G_8(\beta)\left(\frac{16-\beta^2}{4}\right) G_8(-\beta)d\beta = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4}\left(\frac{16-\beta^2}{4}\right)d\beta = \frac{8}{3}$$

2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$, sabendo que $X(\omega) = G_{10}(\omega) * \text{Tri}_{2\pi}(\omega)$.

$$\omega_M = 5 + \pi \quad \Rightarrow \quad B = \frac{5+\pi}{2\pi} \quad , \quad T < 1/(2B) = \frac{\pi}{\pi+5}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/5$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k3)p(t-k3), \quad p(t) = \exp(jt)G_1(t-0.5)$$

$$T = 3 \ , \ H(j\omega) = \frac{3G_{2\pi/3}(\omega)}{P(\omega)} \quad , \quad P(\omega) = \text{Sa}((\omega-1)/2)\exp(-j(\omega-1)/2)$$

pois

$$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \text{Sa}(\omega/2), \quad \mathcal{F}\{G_1(t-0.5)\} = \text{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2),$$

$$\mathcal{F}\{\exp(jt)G_1(t-0.5)\} = \text{Sa}((\omega-1)/2)\exp(-j(\omega-1)/2)$$

Alternativamente,

$$P(\omega) = \int_0^1 \exp(j(1-\omega)t)dt = \frac{\exp(j(1-\omega))-1}{j(1-\omega)} = \frac{1-\exp(-j(\omega-1))}{j(\omega-1)}$$

$$= \frac{2\exp(-j(\omega-1)/2)}{(\omega-1)}\left(\frac{\exp(j(\omega-1)/2)-\exp(-j(\omega-1)/2)}{2j}\right)$$

3ª Questão: Determine a transformada inversa de Laplace de

$$X(s) = \frac{3}{(s+2)^2} + \frac{2}{s-1}$$

para as regiões: a) $\text{Re}(s) < -2$; b) $\text{Re}(s) > 1$; c) $-2 < \text{Re}(s) < 1$.

$$\text{a) } x(t) = (-3t\exp(-2t) - 2\exp(t))u(-t), \quad \text{b) } x(t) = (3t\exp(-2t) + 2\exp(t))u(t)$$

$$\text{c) } x(t) = 3t\exp(-2t)u(t) - 2\exp(t)u(-t)$$

4ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5\dot{x} + 10x$$

a) Determine a função de transferência $H(s)$ b) A resposta ao impulso $h(t)$ (condições iniciais nulas)

$$H(s) = \frac{5s+10}{s^2+4s+13} = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2+9}, \quad h(t) = 5\exp(-2t)\cos(3t)u(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$(p^2+1)y(t) = \cos(t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = 2, \ \dot{y}(0) = 4$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$; b) Determine a solução;
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b).

$$\text{a) } \bar{D}(p) = (p^2+1), \ y_f(t) = \frac{1}{2}t\ \text{sen}(t)$$

$$\text{b) } y(t) = 2\cos(t) + 4\ \text{sen}(t) + \frac{1}{2}t\ \text{sen}(t) \quad \text{c) } (p^2+1)^2 y = 0, \ y^{(2)}(0) = -1, \ y^{(3)}(0) = -4$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema não linear dado pela equação de estado para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= (v_1^2-1)v_2 + (v_2^2-4)v_1 + 3x \\ \dot{v}_2 &= (v_1^2-1)v_1v_2 + (v_2^2-4)v_1v_2 + 2x^2 \end{aligned}$$

b) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno de cada ponto de equilíbrio para $x = 0$

$$(0,0), \quad (1,2), \quad (-1,2), \quad (1,-2), \quad (-1,-2), \quad (\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2), \quad (-\sqrt{10}/2, -\sqrt{10}/2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2v_1v_2 + v_2^2 - 4 & v_1^2 - 1 + 2v_1v_2 \\ 3v_1^2v_2 - 5v_2 + v_2^3 & v_1^3 - 5v_1 + 3v_1v_2^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(0,0) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1,2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad (1,-2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(-1,2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad (-1,-2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(\sqrt{10}/2, \sqrt{10}/2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7/2 & 13/2 \\ 5\sqrt{10}/2 & 5\sqrt{10}/2 \end{bmatrix}, \quad (-\sqrt{10}/2, -\sqrt{10}/2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7/2 & 13/2 \\ 5\sqrt{10}/2 & 5\sqrt{10}/2 \end{bmatrix}$$

Assintoticamente estável:

$$(-1,2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + 12\lambda + 48 \ \Rightarrow \ \text{autovalores com parte real negativa.}$$

Note também que o polinômio pode ser obtido como $\Delta(\lambda) = \lambda^2 - (\text{Tr}(A))\lambda + \det(A)$