**1ª Questão:** Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 12t\exp(2t) - 10\exp(3t)\ \mathrm{sen}(2t)$$

**2ª Questão:** a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 4)^3$$

b) Determine uma matriz $Q$ que transforma a matriz $A$ na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} 0 & d & a \\ b & e & b \\ -b & b-e & -b \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

**3ª Questão:** Determine uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertível que verifique a igualdade

$$A + A^{-1} = A^3 + A^2 + I$$

Multiplicando por $A$ tem-se

$$A^4 + A^3 - A^2 + A - I = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \det(\lambda I - A) = \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

**4ª Questão:** Determine os valores de $\beta$ para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

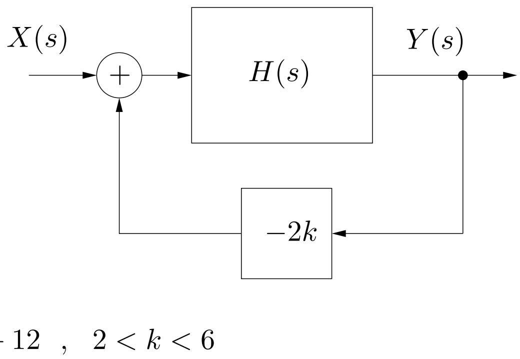
$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 2\beta \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} x$$

$$\mathrm{Ctrb}(A,b) = \begin{bmatrix} b & Ab & A^2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta & 2\beta+2 & 6\beta+4 \\ 0 & 2 & 4\beta+4 \\ 2 & 4\beta+2 & 8\beta+6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Não controlável para } \det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = 0$$

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A,b)) = 16\beta - 32\beta^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, +\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2$$

**5ª Questão:** Determine o intervalo para $k$ tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s^2 - s}{4s^3 + 16s + 12}$$




$$D(s) = 4s^3 + 2ks^2 + (16 - 2k)s + 12 \quad , \quad 2 < k < 6$$

**6ª Questão:** Conclua (com justificativa) sobre a estabilidade assintótica do sistema linear invariante no tempo $\dot{v} = Av$, sabendo que a equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -\mathrm{I}$$

$$P = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

produziu como solução única a matriz $P$ ao lado.

$$p_{11} = 5, \quad \det \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = 11, \quad \det(P) = -1 \;\Rightarrow\; \text{Sistema Não é Assint. Estável}$$

**7ª Questão:** Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x$$

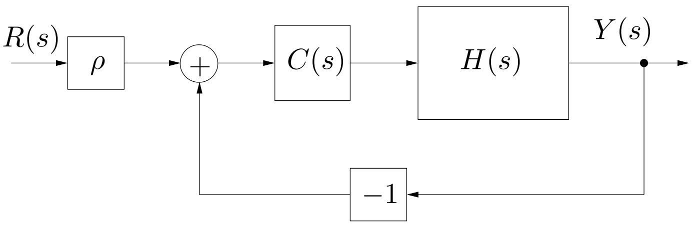
e a lei de controle $x = r - kv$. Determine, se possível (justificando) um ganho $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ que aloque os autovalores do sistema em malha fechada em $-2$ e $-3$.

$$K = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$$

**8ª Questão:** Considere o sistema linear descrito pela função de transferência

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2 - 5s + 2}$$

e o esquema de realimentação unitária com mostrado na figura abaixo.




a) Determine um controlador próprio que aloque os pólos do sistema em malha fechada em $-1$, $-2$, $-4$, ou seja, nas raízes do polinômio

$$(s+1)(s+2)(s+4) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8$$

$$(a_1 s + a_0)(s^2 - 5s + 2) + (b_1 s + b_0)(s-2) = s^3 + 7s^2 + 14s + 8, \quad a_1 = 1, b_1 = 32, b_0 = -24, a_0 = -20$$

$$C(s) = \frac{32s - 24}{s - 20}$$

b) Determine o valor de $\rho$ que garante erro em regime nulo para entrada em degrau

$$\rho = \frac{f_0}{b_0 \beta_0} = \frac{8}{(-24)(-2)} = \frac{1}{6}$$