1ª Questão: Determine a transformada de Fourier do sinal

$$x(t) = \frac{(t-10)j}{\left((t-10)^2+4\right)^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\exp(-2|t|)}{4}\right\} = \frac{1}{\omega^2+4}, \quad \mathcal{F}\left\{\frac{t\exp(-2|t|)}{4}\right\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{\omega^2+4}\right) = \frac{-j2\omega}{(\omega^2+4)^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\underbrace{\frac{-t\exp(-2|t|)\exp(j10t)}{8}}_{x(t)}\right\} = \underbrace{\frac{j(\omega-10)}{\left((\omega-10)^2+4\right)^2}}_{X(\omega)}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{(t-10)j}{\left((t-10)^2+4\right)^2}\right\} = 2\pi x(-\omega) = \frac{\pi\omega}{4}\exp(-2|\omega|)\exp(-j10\omega)$$

2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$

$$x(t) = \mathrm{Sa}^2(t)\mathrm{Sa}^3(3t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^2(t)\right\} * \mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^3(3t)\right\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^2(t)\right\} * \left(\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^2(3t)\right\} * \mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}(3t)\right\}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^2(t)\right\} = \pi\mathrm{Tri}_4(\omega), \quad \mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}(3t)\right\} = \frac{\pi}{3}G_6(\omega), \quad \mathcal{F}\left\{\mathrm{Sa}^2(3t)\right\} = \frac{\pi}{3}\mathrm{Tri}_{12}(\omega)$$

Largura da faixa de frequência de $X(\omega) = 4+6+12 = 22$

$$\omega_M = 11 = 2\pi B,\ B = \frac{11}{2\pi}, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{11}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/5$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k4)p(t-k4), \quad p(t) = (-t+1)G_1(t+0.5) + G_1(t-0.5)$$

$$T = 4\ ,\ H(j\omega) = \frac{4G_{2\pi/4}(\omega)}{P(\omega)}$$

Graficamente:

$$P(\omega) = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1-\exp(j\omega)}{j\omega} + 2\exp(j\omega) - \exp(-j\omega)\right)$$

ou

$$P(\omega) = -j\frac{d}{d\omega}\Big(\mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2)\Big) + \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2) + \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2)$$
$$= \frac{-j\exp(j\omega)}{\omega} + \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2} + 2\ \mathrm{Sa}(\omega/2)\cos(\omega/2)$$

3ª Questão: Determine a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{x(t)\}$ e a região de convergência Ω_x para

$$x(t) = 2t^2\exp(5t)u(-t)$$

$$y(t) = x(-t) = 2t^2\exp(-5t)u(t), \quad Y(s) = \frac{4}{(s+5)^3},\ \mathrm{Re}(s) > -5$$

$$X(s) = Y(-s) = \frac{-4}{(s-5)^3},\ \mathrm{Re}(s) < 5$$

4ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13 & -4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x, \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} v, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) A função de transferência $H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$

b) A equação diferencial $D(p)y = N(p)x$

c) A resposta ao impulso $h(t)$ (condições iniciais nulas)

d) A solução $y(t)$ para $y(0) = 5$, $\dot{y}(0) = -19$ e $x = 0$.

$$H(s) = \frac{5s+1}{s^2+4s+13} = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{3 \times 3}{(s+2)^2+9}$$

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 13y = 5\dot{x} + x$$

$$h(t) = \big(5\exp(-2t)\cos(3t) - 3\exp(-2t)\text{sen}(3t)\big)u(t)$$

$$Y(s) = \frac{(s+4)y(0) + \dot{y}(0)}{(s+2)^2+9} = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2+9} - \frac{3 \times 3}{(s+2)^2+9}, \quad y(t) = h(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$(p^2 + 4p + 4)y(t) = t\exp(-2t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = -2, \ \dot{y}(0) = 1$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$; b) Determine a solução;
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b).

$$\text{a) } \bar{D}(p) = (p+2)^2, \ y_f(t) = \frac{1}{6}t^3\exp(-2t)$$

$$\text{b) } y(t) = -2\exp(-2t) - 3t\exp(-2t) + \frac{1}{6}t^3\exp(-2t), \quad \text{c) } (p+2)^4 y = 0, \ y^{(2)}(0) = 4, \ y^{(3)}(0) = -19$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = 0$ do sistema não linear dado pela equação de estado

$$\dot{v}_1 = 2v_1 - v_1v_2 + 3x$$
$$\dot{v}_2 = 2v_1v_2 + v_2 + 2x^2$$

b) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno de cada ponto de equilíbrio para $x = 0$, analisando o comportamento local (instável, assintoticamente estável ou nada se pode afirmar)

$$(0,0), \quad (-1/2, 2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 - v_2 & -v_1 \\ 2v_2 & 2v_2 + 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(0,0) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (instável)}, \quad (-1/2, 2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 2, \ \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}, \text{ (instável)}$$