1ª Questão: Determine um sistema linear invariante no tempo (matriz A, vetor c e vetor de condições iniciais $v(0)$), dado por

$$\dot{v} = Av, \quad v(0), \quad y = cv$$

que produza como solução

$$y(t) = 2t^2 + 3t + 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2ª Questão: a) Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 3)^3$$

b) Determine uma matriz Q que transforma a matriz A na forma de Jordan $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & d & \bar{a} \\ -a & a/2 - d & -\bar{a} \\ -a/2 & f & c \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: a) Determine $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A$$

b) Determine $\exp(At)$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6, \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$\rho_0(t) = -2\exp(3t) + 3\exp(2t), \quad \rho_1(t) = \exp(3t) - \exp(2t)$$

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} \exp(2t) & 7(\exp(3t) - \exp(2t)) \\ 0 & \exp(3t) \end{bmatrix}$$

4ª Questão: a) Determine os valores de β para os quais o sistema abaixo deixa de ser controlável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \end{bmatrix} x$$

$$\mathrm{Ctrb}(A, b) = \begin{bmatrix} b & Ab \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 + 7\beta \\ \beta & 3\beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Não controlável para } \det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = 0$$

$$\det(\mathrm{Ctrb}(A, b)) = \beta - 7\beta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, 1/7$$

b) Determine, para cada valor de β, qual autovalor deixa de ser controlável.

$\beta = 0$: (autovalor 3 deixa de ser controlável)

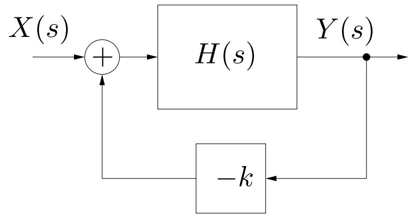
$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$\beta = 1/7$: (autovalor 2 deixa de ser controlável)

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{bmatrix} = 1, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix} = 2$$

5ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável

$$H(s) = \frac{s}{s^4 + s^3 + 4s^2 + 3}$$



$$1 < k < 3$$

6ª Questão: a) Determine a matriz P solução da equação de Lyapunov (indicando a matriz Q utilizada) associada ao sistema linear invariante no tempo

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} v$$

b) Determine, em função da solução encontrada, se o sistema é assintoticamente estável ou não.

$$Q = 6\mathrm{I}, \qquad \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} > 0 \text{ pois } 3 > 0 \text{ e } 15 - 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sistema assintoticamente estável}$$

7ª Questão: Considere o sistema linear dado por

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x$$

e a lei de controle $x = r - kv$. Determine, se possível (justificando) um ganho $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ que aloque os autovalores do sistema em malha fechada em -3 e -4.

$$K = \begin{bmatrix} 13 & 12 \end{bmatrix}$$