

Laplace (funções causais):  $\mathcal{L}\left\{\frac{t^m}{m!} \exp(-at)u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^{m+1}}$

$$\mathcal{L}\{\cos(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin(\beta t) \exp(-at)u(t)\} = \frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad \frac{N(p)}{D(p)} = c(pI - A)^{-1}b + d = b'(pI - A')^{-1}c' + d$$

$$v = T\hat{v} \Rightarrow \hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{b} = T^{-1}b, \quad \hat{c} = cT, \quad T \text{ não singular}$$

A representação entrada-saída é invariante com transformações de similaridade.

$$y(t) = c \exp(At)v_0 + c(\exp(At)u(t)) * (bx(t)) + dx(t), \quad Y(s) = c(sI - A)^{-1}v_0 + (c(sI - A)^{-1}b + d)X(s)$$

$$\text{Cayley-Hamilton: } \Delta(\lambda) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i \lambda^i, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho_i A^i, \quad f(\text{diag}(A_1, \dots, A_N)) = \text{diag}(f(A_1), \dots, f(A_N))$$

$$\text{Bloco de Jordan: } J_k(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma \end{bmatrix}, \quad f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \dot{f}(\lambda) & \cdots & f^{(k-1)}(\lambda)/(k-1)! \\ 0 & f(\lambda) & \cdots & f^{(k-2)}(\lambda)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{bmatrix}_{\lambda=\sigma}$$

Forma de Jordan de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\nu(M_\lambda) = n - \text{rank}(M_\lambda)$  (dimensão do espaço nulo de  $M_\lambda = A - \lambda I$ ):

1) Para cada  $\lambda$  (multiplicidade algébrica  $n_\lambda$ ), compute  $M_\lambda = (A - \lambda I)$  e a dimensão  $r_\lambda$  do espaço nulo de  $M_\lambda$ . O número de blocos de Jordan associados a  $\lambda$  é igual a  $r_\lambda$  e a soma dos tamanhos de cada um dos blocos é igual a  $n_\lambda$ . Note que  $r_\lambda$  é a multiplicidade geométrica de  $\lambda$ , ou seja, o número de autovetores linearmente independentes associados a  $\lambda$ ,  $1 \leq r_\lambda \leq n_\lambda$ .

2) A dimensão do maior bloco é igual ao menor  $k$  tal que  $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$  que é denominado  $k_\lambda$ . Note que  $\nu(M_\lambda^k) = n_\lambda$  para  $\forall k \geq k_\lambda$ .

3) O número de blocos de dimensão  $i$ ,  $1 \leq i \leq k_\lambda$ , é determinado a partir da dimensão do espaço nulo das matrizes  $M_\lambda^i$ . Assim, o número de blocos de dimensão  $i$ ,  $1 \leq i \leq k_\lambda$  pode ser determinado por

$$2\nu(M_\lambda^i) - \nu(M_\lambda^{i-1}) - \nu(M_\lambda^{i+1})$$

4) A forma de Jordan  $\hat{A}$  é a matriz bloco diagonal composta pelos blocos de Jordan de cada autovalor.

5) A transformação de similaridade  $Q$  (não singular) que produz a forma de Jordan pode ser obtida do sistema linear de equações  $AQ = Q \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r})$

$$\dot{v} = Av + bx, \quad y = cv + dx, \quad v(0), \quad \text{para } x \text{ solução de } x = \bar{c}\bar{v}, \quad \dot{\bar{v}} = \bar{A}\bar{v}, \quad \bar{v}(0)$$

$$\Rightarrow \text{Sistema autônomo aumentado: } \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & b\bar{c} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v(0) \\ \bar{v}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{v}_0 \end{bmatrix}, \quad y = [c \quad d\bar{c}] \begin{bmatrix} v \\ \bar{v} \end{bmatrix}$$

Lyapunov: Considere o sistema  $\dot{v} = f(v)$ . O ponto de equilíbrio  $\bar{v} = 0$  é assintoticamente estável se existir um domínio  $\Omega$  contendo a origem e uma função escalar  $\psi(v)$  diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\} \quad \text{e} \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \quad \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Lyapunov (SLIT): A solução da equação de Lyapunov  $A'P + PA = -Q$ ,  $\forall Q = Q' > 0$ , é única, simétrica e definida positiva sse todos os autovalores da matriz  $A$  tiverem parte real negativa.

Controlável se e somente se  $\text{rank}(\text{Ctrb}(A, b)) = n$ . Observável se e somente se  $\text{rank}(\text{Obsv}(A, c)) = n$ .

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad , \quad \text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Ctrb}(A, b) = [ b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b ]$$

Equivalentemente, controlável se e somente se tiver  $\text{rank } n$  a matriz

$$[A - \lambda I \quad b] \in \mathbb{C}^{n \times (n+1)}$$

e observável se e somente se tiver  $\text{rank } n$  a matriz

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times n}$$

Decomposição canônica:  $\bar{v} = Pv$

Se  $\text{rank}$  de  $\text{Ctrb}(A, b) = r < n$ ,  $P^{-1}$  é formada por colunas de 1 a  $r$  LI de  $\text{Ctrb}(A, b)$  mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_c \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [\bar{c}_c \quad \bar{c}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{v}_c \\ \bar{v}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Se  $\text{rank}$  de  $\text{Obsv}(A, c) = r < n$ ,  $P$  é formada por linhas de 1 a  $r$  LI de  $\text{Obsv}(A, c)$  mais vetores LI

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_o \\ \dot{\bar{v}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_o & 0 \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_o \\ \bar{b}_{\bar{o}} \end{bmatrix} x \quad , \quad y = [\bar{c}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{v}_o \\ \bar{v}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \bar{d}x$$

Compensadores

Esquema de realimentação unitária com  $N(s)$  e  $D(s)$  coprimos de grau  $m$

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad , \quad C(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

com a função de transferência em malha fechada

$$G(s) = \rho \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} = \frac{\rho B(s)N(s)}{A(s)D(s) + B(s)N(s)}$$

Os  $m + \ell$  pólos de malha fechada podem ser arbitrariamente alocados por um controlador próprio de grau  $\ell$  se e somente se  $\ell \geq m - 1$