1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \rho^n \sum_{k=-\infty}^{n} \rho^{-k} x[k], \quad 0 < \rho < 1$$

a) Determine a resposta ao impulso $h[n]$ do sistema

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\rho^{n-k}u[n-k], \qquad h[n] = \rho^n u[n]$$

b) Determine a resposta para a entrada $x[n] = \rho^n u[n]$, $0 < \rho < 1$

$$y[n] = h[n] * x[n] = (\rho^n u[n]) * (\rho^n u[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \rho^k u[k]\rho^{n-k}u[n-k] = u[n]\Big(\rho^n \sum_{k=0}^{n} 1\Big) = (n+1)\rho^n u[n]$$

c) Classifique o sistema quanto a: linearidade, BIBO estabilidade, e causalidade, justificando a resposta.

O sistema é linear, BIBO estável, pois a resposta ao impulso é absolutamente somável, e causal, pois $h[n] = 0$ para $n < 0$.

2ª Questão: Determine a sequência $x[n]$ cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-a)^3}, \quad |z| < a, \quad a > 0$$

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{z^{-2}}{(z^{-1}-a)^3}, \quad |z^{-1}| < a, \qquad Y(z) = \frac{-a^{-3}z}{(z-1/a)^3}, \quad |z| > 1/a$$

$$y[n] = -a^{-3}\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{a}\right)^{n-2} u[n] = \frac{-n(n-1)}{2a} a^{-n} u[n]$$

$$x[n] = y[-n] = -\frac{n(n+1)}{2} a^{n-1} u[-n]$$

3ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{6}{z^3 - 3z^2 - 4z + 12} = \frac{6}{(3-z)(2-z)(2+z)}, \quad |z| < 2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ c) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = 1/2, \quad \Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{1}{6}, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \frac{7}{6}$$

4ª Questão: Considere a equação a diferenças dada por $y[n+1] - y[n] = 2 + n^2$, $\quad y[0] = 1$, determine:
a) $Y(z)$ (considerando que a equação foi multiplicada dos dois lados pelo degrau unitário $u[n]$)

$$Y(z) = \frac{y[0]z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z^2+z}{(z-1)^4}$$

b) A solução forçada $y_f[n]$ da equação; c) A solução da equação para $y[0] = 1$

$$y_f[n] = \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3, \quad y[n] = 1 + \frac{13}{6}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$$

5$^{\underline{a}}$ Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída

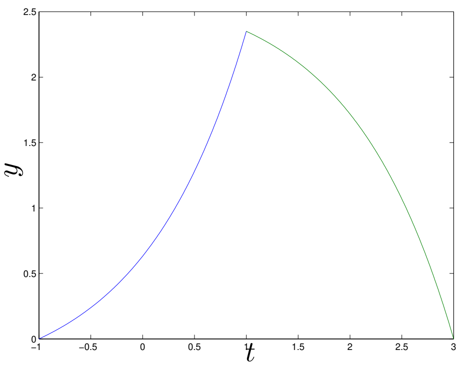
$$y(t) = \exp(t)\int_{t-1}^{t+1} \exp(-\beta)x(\beta)d\beta$$

a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema: $h(t) = \exp(t)\big(u(t+1) - u(t-1)\big) = \exp(t)G_2(t)$
b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade
Como $y(t) = h(t) * x(t)$, tem-se: Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e não causal ($h(t) \neq 0,\ t < 0$)

c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_2(t-1) = u(t) - u(t-2)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t) - \mathcal{I}_h(t-2), \quad \mathcal{I}_h(t) = \big(\exp(t) - \exp(-1)\big)G_2(t) + \big(\exp(1) - \exp(-1)\big)u(t-1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \big(\exp(t) - \exp(-1)\big)G_2(t) + \big(\exp(1) - \exp(-1)\big)u(t-1) \\ &\quad - \big(\exp(t-2) - \exp(-1)\big)G_2(t-2) - \big(\exp(1) - \exp(-1)\big)u(t-3) \\ &= \big(\exp(t) - \exp(-1)\big)G_2(t) + \big(\exp(1) - \exp(t-2)\big)G_2(t-2) \end{aligned}$$



6$^{\underline{a}}$ Questão: Determine e esboce funções $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ ortogonais que gerem o mesmo espaço que as funções

$$f_1(t) = G_4(t) \quad , \quad f_2(t) = G_2(t+1) \quad , \quad f_3(t) = G_2(t)$$

$$g_1(t) = f_1(t)\ ,\ g_2(t) = f_2(t) - \frac{1}{2}g_1(t) = \frac{1}{2}G_2(t+1) - \frac{1}{2}G_2(t-1)$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \frac{1}{2}g_1(t) = -\frac{1}{2}G_1(t+1.5) + \frac{1}{2}G_2(t) - \frac{1}{2}G_1(t-1.5)$$

7$^{\underline{a}}$ Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t - k5) \quad , \quad p(t) = (t+2)G_1(t+0.5) + tG_1(t-0.5)$$

b) Calcule c_0: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{5}$, $c_0 = 2/5$

$$c_k = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{jk2\pi/5}\left(\frac{\exp(j2k\pi/5) - \exp(-jk2\pi/5}{jk2\pi/5} + \exp(jk2\pi/5) - 2 - \exp(-jk2\pi/5)\right)\right)$$

c) Determine a potência média do sinal

$$\int_{-1}^{0}(t+2)^2dt + \int_{0}^{1}t^2dt = \left(\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 4t\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{t^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$