1ª Questão: Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt, \quad x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Sa}^2(t/2)$$

Denotando $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, como $x(t)$ é real tem-se

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(t/2)\} = 2\pi\mathrm{Tri}_2(\omega), \quad \mathcal{F}\{x(t)\} = (j\omega)(j\omega)2\pi\mathrm{Tri}_2(\omega) = -2\pi\omega^2\mathrm{Tri}_2(\omega)$$

$$\mathrm{Tri}_2(\omega) = (\omega+1)G_1(\omega+0.5) + (-\omega+1)G_1(\omega-0.5)$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-1}^{0} 2^2\pi^2\omega^4(\omega+1)^2 d\omega + \int_{0}^{1} 2^2\pi^2\omega^4(-\omega+1)^2 d\omega\right) = \frac{4\pi}{105}$$

2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$

$$x(t) = \mathrm{Sa}^{10}(t)$$

Como $\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(t)\} = \pi G_2(\omega)$, $X(\omega)$ é o resultado da convolução de 10 gates de larguras iguais a 2, de -1 a 1, resultando em um sinal de -10 a 10, cuja máxima frequência é $\omega_M = 10$ rad/s.

$$\omega_M = 10 = 2\pi B, \ B = \frac{10}{2\pi}, \quad T < \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{10}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/10$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k5)p(t-k5), \quad p(t) = \big(\exp(t)u(-t) + \exp(-t)u(t)\big)G_2(t)$$

$$T = 5, \ \omega_0 = 2\pi/5, \quad H(j\omega) = \frac{5G_{2\pi/5}(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\exp(-j\omega t)dt = \int_{-1}^{0}\exp\big((1-j\omega)t\big)dt + \int_{0}^{1}\exp\big((-1-j\omega)t\big)dt$$

$$= \frac{1-\exp(-1+j\omega)}{1-j\omega} + \frac{1-\exp(-1-j\omega)}{1+j\omega} = \frac{2-(1+j\omega)\exp(-1+j\omega)-(1-j\omega)\exp(-1-j\omega)}{\omega^2+1}$$

ou então

$$p(t) = \big(\exp(t)u(-t) + \exp(-t)u(t)\big)G_2(t) = \exp(t)G_1(t+0.5) + \exp(-t)G_1(t-0.5)$$

$$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2), \quad \mathcal{F}\{G_1(t+0.5)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2)$$

$$\mathcal{F}\{\exp(t)G_1(t+0.5)\} = \mathrm{Sa}\big((\omega-1/j)/2\big)\exp\big(j(\omega-1/j)/2\big)$$

$$\mathcal{F}\{\exp(-t)G_1(t-0.5)\} = \mathrm{Sa}\big((\omega+1/j)/2\big)\exp\big(-j(\omega+1/j)/2\big)$$

$$P(\omega) = \mathrm{Sa}\big((\omega-1/j)/2\big)\exp\big(j(\omega-1/j)/2\big) + \mathrm{Sa}\big((\omega+1/j)/2\big)\exp\big(-j(\omega+1/j)/2\big)$$

3ª Questão: Determine o sinal $x(t)$ cuja transformada de Laplace $\mathcal{L}\{x(t)\}$ e região de convergência Ω_x são dados por

$$X(s) = \frac{-2}{(s+3)^3} + \frac{-6}{(s-4)^4}, \quad \Omega_x = \{s \ : \ \mathrm{Re}(s) < -3\}$$

$$Y(s) = X(-s) = \frac{-2}{(-s+3)^3} + \frac{-6}{(-s-4)^4} = \frac{2}{(s-3)^3} + \frac{-6}{(s+4)^4}, \quad \mathrm{Re}(-s) < -3 \ \Rightarrow \ \mathrm{Re}(s) > 3$$

$$y(t) = \big(t^2 \exp(3t) - t^3 \exp(-4t)\big)u(t), \quad x(t) = y(-t) = \big(t^2 \exp(-3t) + t^3 \exp(4t)\big)u(-t)$$

4ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0), \ \dot{y}(0)$$

Determine as condições iniciais $y(0)$ e $\dot{y}(0)$ para que a transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, sendo $y(t)$ a solução da equação, possa ser escrita como

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{(s+3)y(0) + \dot{y}(0)}{s^2+3s+2} = \frac{A(s+2) + B(s+1)}{s^2+3s+2}, \quad y(0) = A + B, \ \dot{y}(0) = -A - 2B$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$p(p+1)y = 3t^2, \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$; b) Determine a solução;
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b).

$$\text{a) } \bar{D}(p) = p^3, \ y_f(t) = 6t - 3t^2 + t^3$$

$$\text{b) } y(t) = 6\exp(-t) - 6 + 6t - 3t^2 + t^3, \quad \text{c) } p^4(p+1)y = 0, \ y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0, \ y^{(4)}(0) = 6$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio para $x = 0$ do sistema não linear dado pela equação de estado

$$\dot{v}_1 = -2v_1 + 5v_1v_2 - 4v_2 + 3x$$
$$\dot{v}_2 = 4v_1 - 2v_2 + 2x$$

b) Determine o sistema linearizado $\dot{v} = Av + bx$ em torno de cada ponto de equilíbrio para $x = 0$, analisando o comportamento local (instável, assintoticamente estável ou nada se pode afirmar)

$$(0,0), \quad (1,2)$$

$$A = \begin{bmatrix} -2+5v_2 & -4+5v_1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(0,0) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = (\lambda+2)^2 + 16, \ \lambda_{1,2} = -2 \pm j4, \qquad \text{(assint. estável)}$$

$$(1,2) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 20, \ \lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{2}, \qquad \text{(instável)}$$