1ª Questão: Determine $v(t)$ para

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} v, \quad v(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\exp(At) = \rho_0(t)\mathrm{I} + \rho_1(t)A, \quad \rho_0(t) = 3\exp(2t) - 2\exp(3t), \quad \rho_1(t) = \exp(3t) - exp(2t)$$

$$v(t) = \exp(At)v(0) = \begin{bmatrix} 5\exp(2t) - 4\exp(3t) & 4\exp(3t) - 4\exp(2t) \\ -5\exp(3t) + 5\exp(2t) & -4\exp(2t) + 5\exp(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\exp(2t) + 4\exp(3t) \\ 5\exp(3t) - 3\exp(2t) \end{bmatrix}$$

2ª Questão: Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ da matriz A abaixo e uma matriz Q tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad Q_{geral} = \begin{bmatrix} a & d & \bar{a} \\ 0 & e & b \\ a & a + d - e & \bar{a} - b \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3ª Questão: a) Determine os valores de β_1 e β_2 para os quais o sistema abaixo deixa de ser observável b) Determine, para cada valor de β_1, β_2 qual autovalor deixa de ser observável.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} v$$

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3), \quad \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Os dois autovalores são não observáveis}$$

$$\mathrm{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -2\beta_1 - 5\beta_2 & 4\beta_1 + 7\beta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Não observável para } \det(\mathrm{Obsv}(A, c)) = 0$$

$$\det(\mathrm{Obsv}(A, c)) = 4\beta_1^2 + 9\beta_1\beta_2 + 5\beta_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = -\beta_2, \quad \beta_1 = -\frac{5}{4}\beta_2$$

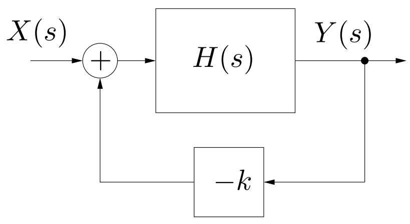
$\beta_1 = -\beta_2 = -\beta \neq 0$: (autovalor 2 deixa de ser observável)

$$M_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} = 1, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 4 \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} = 2$$

$\beta_1 = -(5/4)\beta_2$, $\beta_2 = 4\beta$, $\beta_1 = -5\beta, \beta \neq 0$: (autovalor 3 deixa de ser observável)

$$M_2 = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 5 \\ -5\beta & 4\beta \end{bmatrix} = 2, \qquad M_3 = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -5\beta & 4\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} = 1$$

4ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{8s}{4s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 8}$$

$$1 < k < 2$$

5ª Questão: Classifique a matriz A quanto à estabilidade, justificando, tendo em conta que a matriz P solução da equação de Lyapunov $A'P + PA = -\mathrm{I}$ é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como os menores principais líderes não são positivos, P não é definida positiva e portanto A não é assintoticamente estável.

6ª Questão: Determine, se possível (justificando) um ganho que aloque os autovalores do sistema em malha fechada abaixo em -2 e -3

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} v$$

a) com uma realimentação de estados $x = r - kv$, $k \in \mathbb{R}^{1\times 2}$;

b) com a lei de controle de realimentação de saída $x = r - gy$, $g \in \mathbb{R}$.

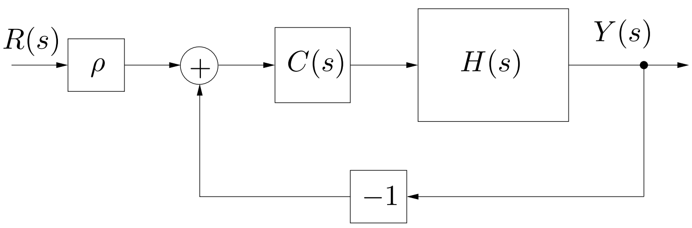
$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

$$A - bk = \begin{bmatrix} 3+k_1 & -3+k_2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + (-k_1 - 4)\lambda + (k_1 + 2k_2 - 3), \quad k = \begin{bmatrix} -9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A - bgc = \begin{bmatrix} 3-g & -3+g \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = \lambda^2 + (g-4)\lambda + (g-3), \quad g = 9$$

7ª Questão: Considere o sistema linear $H(s)$ e o esquema de realimentação unitária abaixo.

$$H(s) = \frac{s+4}{s^2 + 2s - 1}$$



a) Determine um controlador próprio que aloque os polos do sistema em malha fechada em -2, -3, -4, ou seja, nas raízes do polinômio $(s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$

$$(a_1 s + a_0)(s^2 + 2s - 1) + (b_1 s + b_0)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24, \quad a_1 = 1, b_1 = 3, b_0 = 7, a_0 = 4$$

$$C(s) = \frac{3s+1}{s+4}$$

b) Determine o valor de ρ que garante erro em regime nulo para entrada em degrau

$$\rho = \frac{f_0}{b_0 \beta_0} = \frac{24}{(7)(4)} = \frac{6}{7}$$