1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \frac{1}{4^n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4^k x[k] u[n-k]$$

a) Determine a resposta ao impulso $h[n]$: $\quad h[n] = \frac{1}{4^n} u[n]$

b) Classifique o sistema quanto a: linearidade, BIBO estabilidade, e causalidade, justificando a resposta.

Linear e invariante no tempo (pois $y[n] = h[n] * x[n]$), BIBO estável (pois $h[n]$ é absolutamente somável) e causal (pois $h[n] = 0$ para $n < 0$).

c) Determine a resposta à entrada $x[n] = 4^{1-n} u[n]$

Para a entrada $x[n] = 4^{1-n} u[n]$ tem-se

$$\begin{aligned} y[n] = h[n] * x[n] = ((1/4)^n u[n]) * (4(1/4)^n u[n]) &= 4 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k] (1/4)^{n-k} u[n-k] \\ &= 4u[n](1/4)^n \Big(\sum_{k=0}^{n} 1 \Big) = 4(n+1)(1/4)^n u[n] \end{aligned}$$

2ª Questão: Determine $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \quad$ para $\quad x[n] = n^2 3^{-n} u[n]$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 3^{-k} u[k] = \mathcal{Z}\{n^2 (1/3)^n u[n]\}\Big|_{z=1} = \frac{z(1/3)^2 + (1/3)z^2}{(z-1/3)^3}\Big|_{z=1} = \frac{3}{2}$$

3ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{-5z+9}{4z^2 - 18z + 18} = \frac{-5z+9}{4(z-3)(z-3/2)}, \quad |z| < 3/2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 0\}$ b) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ c) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

$$\Pr\{\mathbb{X} = 0\} = \frac{1}{2}, \quad \Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{2}{9}, \quad \mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \frac{5}{4}$$

4ª Questão: Determine, para a equação a diferenças do sistema (linear invariante no tempo e causal) dada por

$$y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = x[n+2] - 7x[n+1]$$

a) A resposta ao impulso $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\}$

$$H(z) = \frac{z^2 - 7z}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z^2 - 7z}{(z-2)(z-3)} = 5\frac{z}{z-2} - 4\frac{z}{z-3}, \ |z| > 3, \quad h[n] = \big(5(2^n) - 4(3^n)\big) u[n]$$

b) A solução forçada $y_f[n]$ da equação considerando uma entrada $x[n] = 3^n$: $y_f[n] = -4n3^n$

c) A solução da equação considerando a entrada $x[n] = 3^n$ e as condições iniciais $y[0] = 0$, $y[1] = 0$

$$y[n] = a3^n + b2^n - 4n3^n, \quad y[n] = 12(3)^n - 12(2)^n - 4n(3)^n$$

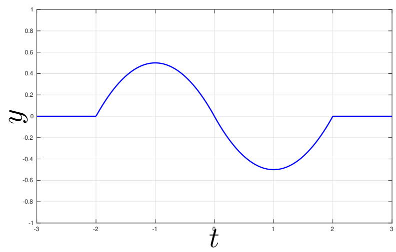
5ª Questão: Considere o sistema descrito pela relação entrada-saída

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} (\beta - t)x(\beta)d\beta$$

a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema: $h(t) = -t\big(u(t+1) - u(t-1)\big) = -tG_2(t)$
b) Classifique o sistema quanto à linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade
Como $y(t) = h(t) * x(t)$, tem-se: Sistema linear invariante no tempo, BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e não causal ($h(t) \neq 0$, $t < 0$)
c) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_2(t)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t+1) - \mathcal{I}_h(t-1), \quad \mathcal{I}_h(t) = \frac{1-t^2}{2}G_2(t)$$

$$y(t) = \frac{1-(t+1)^2}{2}G_2(t+1) - \frac{1-(t-1)^2}{2}G_2(t-1)$$



6ª Questão: Determine e esboce funções $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ ortogonais que gerem o mesmo espaço que as funções

$$f_1(t) = G_4(t-2) \quad , \quad f_2(t) = G_2(t-3) \quad , \quad f_3(t) = G_2(t-2)$$

$$g_1(t) = f_1(t) \ , \ g_2(t) = f_2(t) - \frac{1}{2}g_1(t) = -\frac{1}{2}G_2(t-1) + \frac{1}{2}G_2(t-3)$$

$$g_3(t) = f_3(t) - \frac{1}{2}g_1(t) - \frac{0}{1}g_2 = -\frac{1}{2}G_1(t-0.5) + \frac{1}{2}G_2(t-2) - \frac{1}{2}G_1(t-3.5)$$

7ª Questão: a) Determine os coeficientes c_k da série exponencial de Fourier de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p(t-k8) \quad , \quad p(t) = -tG_1(t+1.5) + G_1(t+0.5) - G_1(t-0.5) - tG_1(t-1.5)$$

b) Calcule c_0: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}, \quad c_0 = 0$

$$c_k = \frac{1}{8}\Bigg(\frac{1}{jk\omega_0}\Big(\frac{-\exp(j2k\omega_0) + \exp(jk\omega_0) - \exp(-jk\omega_0) + \exp(-j2k\omega_0)}{jk\omega_0} + 2\exp(j2k\omega_0) - 2 + 2\exp(-j2k\omega_0)\Big)\Bigg)$$

c) Determine a potência média do sinal

$$\frac{1}{8}\left(2\Big(\int_{-2}^{-1}(-t)^2dt + \int_{-1}^{0}dt\Big)\right) = \frac{1}{8}\left(2\Big(\frac{t^3}{3}\Big|_{-2}^{-1} + 1\Big)\right) = \frac{1}{8}\left(2\Big(\frac{7}{3} + 1\Big)\right) = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$$