1ª Questão: Determine o valor da integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad x(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Sa}^2(t/2), \quad X(\omega) = (j\omega)^2(2\pi)\mathrm{Tri}_2(\omega)$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \big((j\omega)^2(2\pi)\mathrm{Tri}_2(\omega)\big)^2 d\omega = 2\pi(2)\int_{-1}^{0}\big(\omega^2(\omega+1)\big)^2 d\omega$$

$$= 4\pi\int_{-1}^{0}(\omega^6 + 2\omega^5 + \omega^4)d\omega = 4\pi\left(\frac{\omega^7}{7} + \frac{\omega^6}{3} + \frac{\omega^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{0} = 4\pi\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{105}$$

2ª Questão: a) Determine o valor máximo do intervalo T entre amostras para que o sinal $x(t)$ seja recuperado sem erro a partir do sinal amostrado $x(kT)$

$$x(t) = \big(\mathrm{Sa}^2(10t) + \mathrm{Sa}^2(20t)\big)\mathrm{Sa}(15t)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(10t)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(15t)\} + \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(20t)\} * \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(15t)\}\big)$$

$$\mathcal{F}\{\mathrm{Sa}(15t)\} = \frac{2\pi}{30}G_{30}(\omega), \quad \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(10t)\} = \frac{2\pi}{20}\mathrm{Tri}_{40}(\omega), \quad \mathcal{F}\{\mathrm{Sa}^2(20t)\} = \frac{2\pi}{40}\mathrm{Tri}_{80}(\omega)$$

$$\omega_M = 55, \quad T < \frac{\pi}{55}$$

b) Considere $x(t)$ um sinal limitado em frequência cuja máxima frequência é $\pi/10$ rad/s. Determine a expressão da transformada de Fourier do filtro que recupera o sinal $x(t)$ sem distorção a partir de

$$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k6)p(t-k6), \quad p(t) = \big(t+1\big)G_1(t+0.5) - G_1(t-0.5)$$

$$T = 6, \ \omega_0 = 2\pi/6 = \pi/3, \quad H(j\omega) = \frac{6G_{\pi/3}(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P(\omega) = \frac{\exp(j\omega) - 1}{(j\omega)^2} + \frac{\exp(-j\omega) - 2}{j\omega}$$

Ou: $$\mathcal{F}\{G_1(t)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2), \quad \mathcal{F}\{G_1(t+0.5)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(j\omega/2) = \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{G_1(t-0.5)\} = \mathrm{Sa}(\omega/2)\exp(-j\omega/2) = \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{tG_1(t+0.5)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega}\right) = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2}$$

$$\mathcal{F}\{(t+1)G_1(t+0.5) - G_1(t-0.5)\} = \frac{-\exp(j\omega)}{j\omega} - \frac{\exp(j\omega)-1}{\omega^2} + \frac{\exp(j\omega)-1}{j\omega} - \frac{1-\exp(-j\omega)}{j\omega}$$

3ª Questão: Determine a transformada inversa de Laplace $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ para

$$X(s) = \frac{6}{(s+2)^3} + \frac{5}{(s+1)^4}, \quad \mathrm{Re}(s) < -2$$

$$Y(s) = X(-s) = \frac{6}{(-s+2)^3} + \frac{5}{(-s+1)^4} = \frac{-6}{(s-2)^3} + \frac{5}{(s-1)^4}, \quad \mathrm{Re}(s) > 2$$

$$y(t) = \big(-3t^2\exp(2t) + \frac{5}{6}t^3\exp(t)\big)u(t), \quad x(t) = y(-t) = \big(-3t^2\exp(-2t) - \frac{5}{6}t^3\exp(-t)\big)u(-t)$$

4ª Questão: Considere o sistema linear

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} x, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} v$$

a) Determine a função de transferência $H(s) = Y(s)/X(s)$
b) Determine a resposta ao degrau (condições iniciais nulas) $y_u(t)$

$$H(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 5}, \quad Y_u(s) = \frac{20}{s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{4}{s} - \frac{4(s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{2(2)}{(s+1)^2 + 2^2}$$
$$y_u(t) = \big(4 - 4\exp(-t)\cos(2t) - 2\exp(-t)\ \mathrm{sen}(2t)\big)u(t)$$

5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo causal descrito pela equação diferencial

$$p(p+1)y = 4t + 2\exp(-t), \quad p = \frac{d}{dt}, \quad y(0) = 10, \ \dot{y}(0) = 0$$

a) Determine a solução forçada $y_f(t)$ b) Determine a solução
c) Determine uma equação diferencial homogênea e as condições iniciais que produzem a mesma solução do item b)

$$y_f(t) = 2t^2 - 4t - 2t\exp(-t)$$
$$y(t) = 2t^2 - 4t - 2t\exp(-t) + 16 - 6\exp(-t)$$
$$p^3(p+1)^2 y = 0 = (p^5 + 2p^4 + p^3)y = 0, \quad y(0) = 10, \ \dot{y}(0) = 0, \ \ddot{y}(0) = 2, \ \dddot{y}(0) = 0, \ \ddddot{y}(0) = 2$$

6ª Questão: a) Determine os pontos de equilíbrio do sistema abaixo para $x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1^2(v_2 + 2) + 2x = v_1^2 v_2 + 2v_1^2 + 2x \\ \dot{v}_2 &= (v_1 - 5)v_2^2 - 3x = v_1 v_2^2 - 5v_2^2 - 3x \end{aligned}, \qquad \text{Pontos de equilíbrio: } (0,0), \ (5,-2)$$

b) Para cada ponto de equilíbrio, determine o jacobiano, isto é, o sistema linearizado (A e b) tais que em torno dos pontos de equilíbrio $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ tenha-se $\dot{v} = Av + bx$

$$A = \begin{bmatrix} 2v_1(v_2 + 2) & v_1^2 \\ v_2^2 & 2v_2(v_1 - 5) \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

c) Analise o comportamento local em cada ponto de equilíbrio

$$(0,0), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Estável, autovalores nulos e blocos de Jordan de tamanho 1}$$

$$(5,-2), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 25 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Instável, autovalores } \pm 10,$$

7ª Questão: Determine a forma de Jordan $\hat{A}$ e a matriz Q tal que $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 8)^3, \quad J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} a & d & \bar{a} \\ -a & a - d & -\bar{a} \\ 0 & f & c \end{bmatrix}$$

8ª Questão: Determine a solução $y(t)$ para o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} v, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

$$y(t) = 3\exp(-2t) - 2\exp(-3t) - \frac{t^2}{2}\exp(3t)\mathrm{sen}(2t)$$