P1 — Solução

1ª Questão: Considere o sistema discreto definido pela relação entrada-saída

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} k x[n-k]$$

a) Determine a resposta ao impulso $h[n]$: $\quad h[n] = nu[n]$

b) Classifique o sistema quanto a: linearidade, variante ou invariante no tempo, causalidade e BIBO estabilidade (justificando)

Linear e invariante no tempo (pois $y[n] = h[n] * x[n]$), não BIBO estável (pois $h[n]$ não é absolutamente somável) e causal (pois $h[n] = 0$ para $n < 0$).

c) Determine a resposta à entrada $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$

Para a entrada $x[n] = \delta[n+1] - 2\delta[n-1]$ tem-se

$$y[n] = (n+1)u[n+1] - 2(n-1)u[n-1]$$

2ª Questão: A seqüência $x[n]$ tem transformada Z dada por

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}, \quad X(z) = \frac{2z(20z^2 - 15z + 1)}{(2z-1)(4z-1)(z-1)} = \frac{40z^3 - 30z^2 + 2z}{8z^3 - 14z^2 + 7z - 1} \quad , \quad |z| > 1$$

Determine: a) $x[+\infty] = 4$ b) $x[0] = 5$ c) $x[1] = 5$ d) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \to +\infty$

3ª Questão: A transformada Z da distribuição de probabilidade da variável aleatória discreta $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{9z}{(z-4)^2}, \quad |z| < 4$$

Determine:
a) A média da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

b) O momento de segunda ordem da variável $\mathbb{X}$, isto é, $\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\}$

c) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$
Sol.: a) A média é dada por

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{9z}{(z-4)^2}\right)\Big|_{z=1} = z\left(\frac{-9z-36}{(z-4)^3}\right)\Big|_{z=1} = \frac{-45}{-27} = \frac{5}{3}$$

b) O momento de segunda ordem é dado por

$$\mathcal{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_k k^2 \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \left(z\frac{d}{dz}\right)\left(\frac{-9z^2-36z}{(z-4)^3}\right)\Big|_{z=1} = z\left(\frac{9(z^2+16z+16)}{(z-4)^4}\right)\Big|_{z=1} = \frac{9(33)}{81} = \frac{11}{3}$$

c) Da expansão em série de Taylor, tem-se

$$\Pr\{\mathbb{X} = 1\} = \frac{d}{dz}\left(\frac{9z}{(z-4)^2}\right)\Big|_{z=0} = \left(\frac{-9z-36}{(z-4)^3}\right)\Big|_{z=0} = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

4ª Questão: a) Determine a solução forçada $y_f[n]$ de

$$(p-1)y[n] = 5 + 2n$$

b) Determine a solução $y[n]$ de

$$(p-1)y[n] = 5 + 2n \quad , \quad y[0] = 10 \qquad , \qquad y[n] = n^2 + 4n + 10$$

c) Obtenha uma equação a diferenças homogênea e as condições iniciais de forma que a solução coincida com a solução da equação não homogênea descrita no item b).

$$(p-1)^3 y[n] = (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)y[n] = 0 \quad , \quad y[0] = 10 \ , \ y[1] = 15 \ , \ y[2] = 22$$

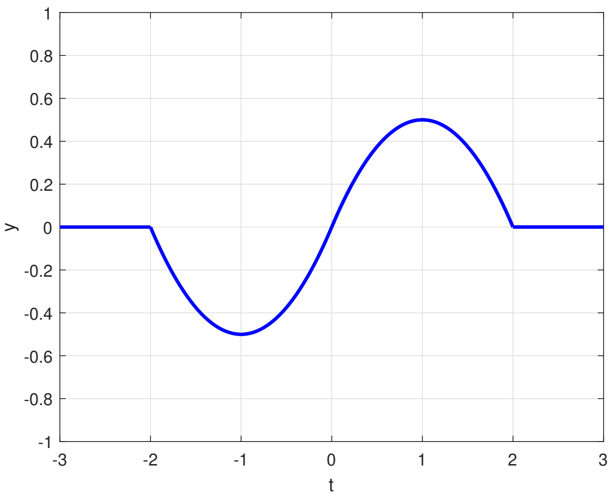
5ª Questão: Considere o sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = tG_2(t)$$

a) Classifique o sistema quanto a: causalidade e BIBO estabilidade (justificando)
BIBO estável ($h(t)$ é absolutamente integrável) e não causal ($h(t) \neq 0$, $t < 0$)
b) Determine e esboce a resposta do sistema à entrada $x(t) = G_2(t)$

$$y(t) = \mathcal{I}_h(t+1) - \mathcal{I}_h(t-1), \quad \mathcal{I}_h(t) = \frac{t^2-1}{2} G_2(t)$$

$$y(t) = \frac{(t+1)^2 - 1}{2} G_2(t+1) - \frac{(t-1)^2 - 1}{2} G_2(t-1)$$



6ª Questão: Determine e esboce funções $\{g_1(t), g_2(t), g_3(t)\}$ ortogonais que gerem o mesmo espaço que as funções

$$f_1(t) = -G_2(t-1) + G_1(t-2.5), \quad f_2(t) = G_4(t-2), \quad f_3(t) = G_3(t-2.5)$$

$$< g_1^2 >= 3, \quad < g_2^2 >= \frac{11}{3}, \quad < f_3 g_1 >= 0$$

$$g_1 = f_1, \quad g_2 = f_2 + \frac{1}{3} g_1, \quad g_3 = f_3 - \frac{3}{11/3} g_2 = f_3 - \frac{9}{11} g_2$$

$$g_2 = (2/3)G_2(t-1) + (4/3)G_1(t-2.5) + G_1(t-3.5)$$

$$g_3 = -(6/11)G_1(t-0,5) + (5/11)G_1(t-1.5) - (1/11)G_1(t-2.5) + (2/11)G_1(t-3.5)$$