1ª Questão: Determine α_0, α_1 e α_2 tais que

$$A^{-3} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

para

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad -3 = \alpha_1 + 2\alpha_2, \quad \frac{1}{8} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

$$\alpha_0 = \frac{49}{8}, \quad \alpha_1 = -\frac{58}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{17}{8}$$

2ª Questão: Determine: a) J (forma de Jordan); b) Q tal que $AQ = QJ$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$$

$$M_2 = A - (2)I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} = 1, \text{dim. esp. nulo} = 3 - 1 = 2$$

$$J = \text{diag}(J_2(2), J_1(2)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad Q_{ger} = \begin{bmatrix} a & d & \bar{a} \\ a & d - a & \bar{a} \\ -a & f & c \end{bmatrix}, \quad Q_{p.ex.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

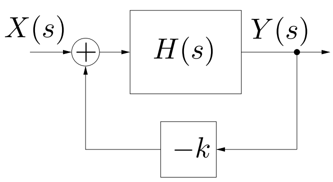
3ª Questão: Determine os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema deixa de ser observável

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} \beta & -2\beta & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix} v, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

$$\text{Obsv}(A, c) = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \beta & \alpha - 2\beta & \beta - \alpha \\ \beta^2 - 2\beta + \alpha & -\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 & \alpha - 2\beta - 2\alpha\beta + \beta^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\text{Obsv}(A, c)) = -\alpha(\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \ \alpha = \beta, \ \alpha = -2\beta$$

4ª Questão: Determine o intervalo para k tal que o sistema em malha fechada mostrado na figura seja BIBO estável



$$H(s) = \frac{-s^2 + s}{5s^3 + 12s^2 + 4}, \quad 2 < k < 10$$

5ª Questão: Usando como função de Lyapunov candidata $\psi(v_1, v_2) = 0.5v_1^2 + 0.5v_2^2$, determine um conjunto Ω no espaço de estados $\mathbb{R}^2$ no qual a função $\psi(v_1, v_2)$ garanta a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $(v_1, v_2) = (0, 0)$ do sistema não linear dado por

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1^3 v_2^2 - 3v_1 v_2^2 \\ \dot{v}_2 &= v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2 \end{aligned}$$

Tem-se $\psi(v_1, v_2) > 0$, $\forall (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ e

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(v_1, v_2) &= v_1 \dot{v}_1 + v_2 \dot{v}_2 \\ &= v_1(v_1^3 v_2^2 - 3v_1 v_2^2) + v_2(v_1^2 v_2^3 - 3v_1^2 v_2^2 - 10v_1^2 v_2) \\ &= v_1^2 v_2^2(v_1^2 - 3) + v_1^2 v_2^2(v_2^2 - 3v_2 - 10) < 0, \quad \forall (v_1, v_2) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

Se $(v_1, v_2) \in \Omega = \{(v_1, v_2) : (v_1^2 - 3 < 0)\ \&\ \underbrace{(v_2^2 - 3v_2 - 10) < 0}_{(v_2+2)(v_2-5)<0}\}$

$$\Longrightarrow \quad \Omega = \{(v_1, v_2) : -\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}, -2 < v_2 < 5\}$$

6ª Questão: Considere o sistema

$$\dot{v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} v + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b} x, \quad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{c} v$$

Determine um ganho $L \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ para que o observador de estados

$$\dot{\hat{v}} = A\hat{v} + bx + L(y - \hat{y}), \quad \hat{y} = c\hat{v}$$

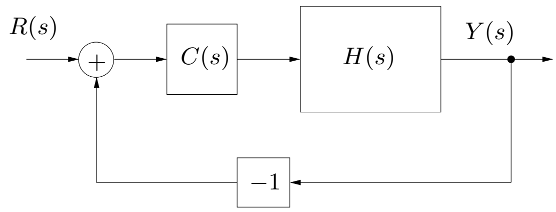
seja tal que o erro $e = v - \hat{v}$ tenda assintoticamente a zero, com os autovalores associados à dinâmica do erro alocados em -4 e -5.

$$A' - C'(K_1 + K_2), \quad K_1 = I,\ \xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ k = \begin{bmatrix} 13 & 2 \end{bmatrix},\ K_2 = \xi k = \begin{bmatrix} 13 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 14 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = K' = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7ª Questão: Considere o sistema linear $H(s)$ e o esquema de realimentação da figura ao lado

$$H(s) = \frac{2s - 3}{s - 1}$$



Determine um controlador próprio que garanta erro em regime nulo para entrada em degrau, rejeição de distúrbios para sinais do tipo degrau, e que aloque os polos em malha fechada em -2, -3, -4 (ou seja, nas raízes do polinômio $F(s) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$).

Considerando (princípio do modelo interno) a planta modificada

$$\frac{2s - 3}{(s - 1)s}$$

e o controlador de ordem um

$$C(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

tem-se

$$(s - 1)s(a_1 s + a_0) + (2s - 3)(b_1 s + b_0) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 1,\ b_0 = -8,\ (a_0 + 2b_1 - 1) = 9,\ (-a_0 - 3b_1 - 16) = 26$$

$$a_1 = 1, \quad a_0 = 114, \quad b_0 = -8,\ b_1 = -52, \quad C(s) = \frac{-52s - 8}{s + 114}$$