Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares

Pedro Luis Dias Peres

Departamento de Telemática,
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação,
Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Brasil

Março de 1997

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da UNICAMP como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de LIVRE DOCENTE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

O Engenheiro

A luz, o sol, o ar livre
envolvem o sonho do engenheiro.
O engenheiro sonha coisas claras:
superfícies, tênis, um copo de água.

O lápis, o esquadro, o papel;
o desenho, o projeto, o número:
o engenheiro pensa o mundo justo,
mundo que nenhum véu encobre.

(Em certas tardes nós subíamos
ao edifício. A cidade diária,
como um jornal que todos liam,
ganhava um pulmão de cimento e vidro.)

A água, o vento, a claridade
de um lado o rio, no alto as nuvens,
situavam na natureza o edifício
crescendo de suas forças simples.

João Cabral de Melo Neto

Prefácio

Este texto reflete uma parte das atividades realizadas ao longo dos últimos cinco anos, dentro do Departamento de Telemática da FEEC, abordando os temas análise convexa e controle robusto de maneira conjunta. Contém material utilizado em cursos de pós-graduação, em trabalhos científicos e também resultados que fazem parte de teses orientadas e de artigos submetidos e/ou publicados.

É claro, portanto, que muitas pessoas colaboraram e participaram de maneira efetiva do conjunto de atividades que resultou neste trabalho, às quais expresso meus sinceros agradecimentos.

Em particular, gostaria de agradecer aos colegas de departamento, pelo apoio e amizade sempre constantes.

Não poderia deixar de lembrar de maneira especial os meus parceiros mais diretos, colegas e alunos, co-autores dos trabalhos desenvolvidos ao longo desses anos, que de fato viabilizaram este texto. Para evitar a indelicadeza de esquecer alguns nomes, deixo de citá-los. A todos, muito obrigado.

Sumário

Resumo

Este trabalho trata do problema de controle por realimentação de estado para sistemas lineares tendo como critérios de desempenho as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, abordando sistemas contínuos e discretos no tempo.

As soluções propostas são obtidas a partir de problemas de otimização convexos, descritos em termos de desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMI's), que podem ser resolvidos numericamente de maneira eficaz, e também permitem a incorporação de restrições adicionais, como por exemplo incertezas no modelo.

Abstract

This work deals with the state feedback control problem for linear systems with $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms as performance index, in both continuous-time and discrete-time cases.

The proposed solutions are obtained from convex optimization problems, described in terms of Linear Matrix Inequalities — LMI's, which can be numerically solved in an efficient way, and allow the incorporation of additional constraints as, for instance, model uncertainty.

Introdução

Assim como a solução do Problema Linear Quadrático, obtida através da equação de Riccati, marcou época nos anos 60 e é utilizada amplamente até hoje, pode-se dizer que a Análise Convexa produziu igual impacto no final dos anos 80, início dos 90.

Graças a uma manipulação adequada, problemas de controle puderam ser formulados em um espaço paramétrico convexo, como problemas de otimização, permitindo o uso de ferramentas computacionais eficientes para sua resolução. Em particular, os problemas convexos descritos por desigualdades matriciais lineares (em inglês, LMIs — *Linear Matrix Inequalities*) atraíram mais atenção, pela simplicidade e elegância, e principalmente pelo verdadeiro arsenal de métodos numéricos especializados disponíveis.

Este trabalho contribui com algumas parametrizações de problemas de controle $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas lineares, contínuos e discretos no tempo, em termos de LMIs.

De maneira geral, apresenta-se o resultado de teoria de controle baseado em uma equação de Riccati, e em seguida duas parametrizações convexas do problema: a primeira, escrita em termos da inversa da solução definida positiva da equação de Riccati, e a segunda em um novo espaço paramétrico obtido após uma transformação de variáveis.

A organização escolhida foi a seguinte: a parte I trata apenas de sistemas contínuos no tempo, e a parte II apenas de sistemas discretos no tempo. Dentro de cada parte são tratados os tópicos otimização $\mathcal{H}_2$ e otimização $\mathcal{H}_\infty$, de maneira espelhar.

Parte I

Sistemas Contínuos no Tempo

Capítulo 1

Definições e preliminares

Os sistemas lineares invariantes no tempo aqui considerados são descritos por equações de estado

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + B_1 w + B_2 u \\ y & = & Cx + Du \end{array} \right. \tag{1.1}$$

nas quais $x \in \Re^n$ é o vetor de estado, $u \in \Re^m$ é o vetor de controle, $w \in \Re^l$ é o vetor de distúrbios e $y \in \Re^r$ é o vetor de saída controlada. As matrizes A, B_1, B_2, C e D têm dimensões apropriadas e são supostas conhecidas. Assume-se também:

i) $C'D = \mathbf{0}$ (ortogonalidade);

ii) $D'D > \mathbf{0}$ (ponderação positiva no controle).

A hipótese i) não acarreta perda de generalidade, tornando as expressões matemáticas mais simples, e ii) é necessária para assegurar a existência de ganhos finitos.

O problema a ser investigado é o de controle por realimentação de estado, isto é, a lei de controle é dada por

$$u = Kx \tag{1.2}$$

com $K \in \Re^{m \times n}$ a determinar. A partir de (1.2), definem-se as matrizes de malha fechada

$$A_f \stackrel{\triangle}{=} A + B_2 K \tag{1.3}$$

$$C_f \stackrel{\triangle}{=} C + DK \tag{1.4}$$

De particular interesse é o conjunto de ganhos estabilizantes definido por

$$\mathcal{K} \stackrel{\triangle}{=} \{K \ : \ A_f \text{ é assint. estável } \} \tag{1.5}$$

isto é, todos os autovalores de A_f têm parte real estritamente negativa. A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(s) = C_f \left(s\mathbf{I} - A_f\right)^{-1} B_1 \tag{1.6}$$

e, para $K \in \mathcal{K}$ e $s = j\omega$, define-se a norma $\mathcal{H}_2$ por

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr } \{H(j\omega)^* H(j\omega)\} d\omega \tag{1.7}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de uma matriz de transferência estável pode ser calculada a partir dos gramianos de controlabilidade L_c e observabilidade L_o, isto é, das matrizes simétricas soluções, respectivamente, das equações

$$A_f L_c + L_c A_f' + B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{1.8}$$

$$A_f' L_o + L_o A_f + C_f' C_f = \mathbf{0} \tag{1.9}$$

resultando

$$\|H\|_2^2 \stackrel{\triangle}{=} \text{Tr}\ (B_1' L_o B_1) = \text{Tr}\ (C_f L_c C_f') \tag{1.10}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência é definida por[1]

$$\|H\|_\infty \stackrel{\triangle}{=} \sup_{\omega \in \Re_+} \sigma_{max}\ [H(j\omega)] \tag{1.11}$$

e pode ser calculada a partir da relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ e a existência de uma matriz definida positiva P [4], [34]:

Lema **1.1** $\|H\|_\infty \leq \gamma$ *se e somente se a desigualdade*

$$A_f' P + P A_f + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + C_f' C_f \leq \mathbf{0} \tag{1.12}$$

admitir $P = P' > \mathbf{0}$ *como solução.*

A partir do lema 1.1, um procedimento iterativo pode ser formulado para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, no qual baixa-se gradativamente o valor de γ até o limite de existência de uma solução definida positiva P para (1.12).

1.1 Problemas de controle e perspectivas

Da seção anterior, alguns problemas de controle podem ser formulados.

A caracterização do conjunto de ganhos estabilizantes $\mathcal{K}$ sob o ponto de vista da análise convexa foi abordada por exemplo em [2], [6], [7]. Com a escolha de um espaço paramétrico adequado, os ganhos estabilizantes podem ser obtidos a partir de um conjunto convexo, possibilitando assim a extensão dos resultados para sistemas incertos (o chamado problema de estabilização quadrática [8], [23]).

Com a definição de um critério de desempenho baseado na norma da matriz de transferência, dois problemas de controle se colocam: o de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ [21], e o de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ [28] e suas extensões para o caso incerto (chamados de problemas de custo garantido [9], [26]).

Utilizando a relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ e a existência de uma matriz definida positiva expressa pelo lema 1.1, pode-se caracterizar o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, isto é,

$$\mathcal{K}_\gamma \stackrel{\triangle}{=} \{K\ :\ A_f \text{ é assint. estável e } \|H\|_\infty \leq \gamma\ \} \tag{1.13}$$

de maneira convexa, permitindo assim a extensão para o caso incerto, o chamado problema de estabilidade quadrática com nível γ prescrito de atenuação de distúrbios [10].

[1] σ_{max} é o valor singular máximo.

Uma vez caracterizado o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, outro critério de desempenho pode determinar a escolha particular do elemento $K \in \mathcal{K}_\gamma$. Se, por exemplo, a norma $\mathcal{H}_2$ é escolhida, tem-se o chamado problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Com a definição de um custo auxiliar, que é um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$, a análise convexa fornece uma solução aproximada para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [11].

Extensões dos problemas mencionados acima envolvem, por exemplo, o problema do controle descentralizado [5]; o problema de realimentação de saída [12], [14], [17], [22], [25], [31]; o problema de controle com alocação de pólos em subregiões do plano complexo [29]; o problema de controle singular, isto é, com o relaxamento da hipótese ii) para $D'D \geq \mathbf{0}$ e suas conexões com o controle a modos deslizantes [36].

Capítulo 2

Otimização $\mathcal{H}_2$

2.1 Introdução

Da discussão realizada no capítulo 1, fica clara a dependência da matriz de transferência em malha fechada em relação a uma particular escolha do ganho de realimentação K. Este capítulo discorre sobre o problema do controle ótimo tendo como critério a norma $\mathcal{H}_2$.

2.2 Problema de Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$

A partir da caracterização de todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam um sistema, define-se o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \; \|H\|_2^2 \tag{2.1}$$

Utilizando a relação entre os gramianos de controlabilidade e de observabilidade com a norma $\mathcal{H}_2$, podem-se definir os problemas equivalentes:

$$\min_{K \in \mathcal{K},\, P} \; \mathrm{Tr}\;(B_1' P B_1) \tag{2.2}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

ou ainda

$$\min_{K \in \mathcal{K},\, W} \; \mathrm{Tr}\;((C + DK)W(C + DK)') \tag{2.4}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + B_1B_1' = \mathbf{0} \tag{2.5}$$

Deixando de lado, por enquanto, a restrição $K \in \mathcal{K}$ e tomando (2.2), tem-se:

$$\min_{K,\, P} \; \mathrm{Tr}\;(B_1' P B_1) \tag{2.6}$$

sujeito a

$$W \quad : \quad (A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \tag{2.7}$$

sendo $W = W'$ a variável dual associada à restrição (2.7). O lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ é dado por

$$\mathcal{L}(P,W,K) = \text{Tr}\left\{B_1'PB_1 + W[(A+B_2K)'P + P(A+B_2K) + (C+DK)'(C+DK)]\right\} \quad (2.8)$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

$$2[D'DK + B_2'P]W = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Se a matriz W for definida positiva, a solução ótima em termos do ganho K é única, assegurando a estabilidade do sistema em malha fechada, dada por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'P \quad (2.12)$$

que, substituído em (2.10), fornece

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

que é a equação de Riccati para sistemas contínuos no tempo. O valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ é dado portanto por

$$\min \ \|H\|_2^2 \ = \ \text{Tr}\ (B_1'PB_1) \quad (2.14)$$

para P solução de (2.13).

A garantia de que o ganho K dado por (2.12) é um ganho estabilizante vem da equação (2.10), podendo ser verificada com a escolha da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Da equação (2.9), a matriz W será definida positiva sempre que (A_f, B_1') for observável; uma condição suficiente para tal é dada por rank $B_1 = n$. Observe que as mesmas condições de otimalidade podem ser obtidas da minimização de Tr (C_fWC_f') sujeito a (2.5).

2.3 Relação com o Problema Linear Quadrático

O problema de controle ótimo por realimentação de estado tendo como índice de desempenho um critério quadrático ficou conhecido como o problema do Regulador Linear Quadrático [1], e pode ser colocado assim:

$$\min_{K} \ J = \int_0^\infty y'y \ dt \quad (2.15)$$

sujeito a

$$\dot{x} \ = \ Ax + B_2u \ , \ \ x_0 \quad (2.16)$$

$$y \ = \ Cx + Du \quad (2.17)$$

com as hipóteses $C'D = \mathbf{0}$ e $D'D > \mathbf{0}$. A solução ótima é dada por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'P \quad (2.18)$$

com $P = P' > \mathbf{0}$ solução da equação de Riccati

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C = \mathbf{0} \tag{2.19}$$

e o valor ótimo do critério é

$$J^* = x_0'Px_0 \tag{2.20}$$

com P solução de (2.19). Portanto, o ganho ótimo K coincide com aquele obtido da minimização da norma $\mathcal{H}_2$, ambos dependentes da solução da equação de Riccati (2.19). O valor do critério iguala o valor mínimo da norma $\mathcal{H}_2$ sempre que

$$x_0'Px_0 = \text{Tr }(B_1'PB_1) \tag{2.21}$$

ou seja, sempre que

$$x_0x_0' = B_1B_1' \tag{2.22}$$

2.4 Parametrização convexa da solução de Riccati

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ (2.6) poderia ser formulado trocando-se a restrição de igualdade (2.7) por uma restrição de menor ou igual, pois a função objetivo aliada ao fato da matriz P ser definida positiva garante, no ótimo, que a igualdade é satisfeita. Assim, um problema equivalente pode ser definido

$$\min_{P} \ \text{Tr }(B_1'PB_1) \tag{2.23}$$

sujeito a

$$P > \mathbf{0} \tag{2.24}$$

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C \leq \mathbf{0} \tag{2.25}$$

mas (2.25) não é uma restrição convexa na variável P.

Através de manipulações algébricas chega-se ao seguinte problema convexo, que fornece como solução ótima $W = P^{-1}$.

Teorema **2.1** *A solução ótima do problema*

$$\min_{X,W} \ Tr\ (X) \tag{2.26}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{2.27}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1 \\ B_1' & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{2.28}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' & WC' \\ CW & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{2.29}$$

fornece

$$W = P^{-1} \quad , \quad Tr\ (X) \ = \ \min \ \|H\|_2^2 \tag{2.30}$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \tag{2.31}$$

Prova: Usando forma complementar de Schur [3], (2.27)-(2.28) implicam

$$X \geq B_1' W^{-1} B_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\ (X) \ \geq \ \mathrm{Tr}\ (B_1' W^{-1} B_1) \tag{2.32}$$

e a minimização em X garante a igualdade. A desigualdade (2.29) implica

$$-AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' \geq WC'CW \tag{2.33}$$

que multiplicada à esquerda e à direita por W^{-1} fornece

$$A'W^{-1} + W^{-1}A - W^{-1}B_2(D'D)^{-1}B_2'W^{-1} + C'C \leq \mathbf{0} \tag{2.34}$$

que, com $W^{-1} = P$, iguala-se a (2.25). □

O teorema 2.1 proporciona uma parametrização convexa da solução da equação de Riccati, e portanto, através da relação (2.31), de todos os ganhos estabilizantes K que são ótimos para alguma escolha particular das matrizes de ponderação C e D do problema de otimização $\mathcal{H}_2$ (consequentemente, um subconjunto de $\mathcal{K}$, já que este último contém todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam o sistema (1.1)). Além disso, pode-se mostrar que o sistema (1.1) é estabilizável se e somente se existir $P = P' > \mathbf{0}$ que verifique (2.25).

Corolário **2.1** *O sistema (1.1) é estável se e somente se existir $P = P' > \mathbf{0}$ tal que*

$$A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C \leq \mathbf{0} \tag{2.35}$$

No caso afirmativo, o ganho estabilizante é dado por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'P \tag{2.36}$$

Prova: Se o sistema é estabilizável, então $\exists\ K$ e $P = P' > \mathbf{0}$ tais que

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) \leq \mathbf{0} \tag{2.37}$$

que pode ser re-escrita (lembrando que $C'D = \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned} &A'P + PA - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P + C'C \\ &+ [K + (D'D)^{-1}B_2'P]'(D'D)[K + (D'D)^{-1}B_2'P] \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como $[K + (D'D)^{-1}B_2'P]'(D'D)[K + (D'D)^{-1}B_2'P] \geq \mathbf{0}$, a expressão (2.35) é satisfeita.

Para provar a suficiência, re-escreve-se (2.35) como

$$\begin{aligned} &(A - B_2(D'D)^{-1}B_2'P)'P + P(A - B_2(D'D)^{-1}B_2'P) \\ &+ (C - D(D'D)^{-1}B_2'P)'(C - D(D'D)^{-1}B_2'P) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2.39}$$

e como $P > \mathbf{0}$, com o ganho K dado por (2.36) o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. □

O resultado do teorema 2.1 permite a extensão para tratar sistemas com as matrizes A, B_1 e C incertas, mas a expressão do ganho depende explicitamente de D e B_2, exigindo portanto que estas sejam precisamente conhecidas. Outras restrições poderiam ser incorporadas ao problema: por exemplo, se $D'D = \mathbf{I}$, para matrizes B_2 bloco diagonais, o controle descentralizado poderia ser obtido a partir da imposição de que a solução W seja bloco diagonal.

2.5 Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_2$

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ (2.6) poderia ser formulado a partir de (2.4)-(2.5), trocando-se esta última equação por uma desigualdade, ou seja,

$$\min_{K \in \mathcal{K}, W} \ \mathrm{Tr}\ ((C + DK)W(C + DK)') \tag{2.40}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \tag{2.41}$$

Com hipóteses adicionais, como por exemplo a observabilidade do par (A_f, B_1'), ou ainda rank $B_1 = n$, os pares (W, K) com $W > \mathbf{0}$ que satisfazem (2.41) parametrizam todo o espaço de ganhos estabilizantes, isto é

$$\exists\ K \in \mathcal{K} \iff \exists\ K, W > \mathbf{0} \text{ tais que (2.41) é satisfeita} \tag{2.42}$$

Porém, o problema (2.40)-(2.41) não é convexo nas variáveis (K, W).

Definindo-se um novo espaço paramétrico chega-se ao problema convexo abaixo, que fornece como solução o ganho ótimo $\mathcal{H}_2$.

Teorema **2.2** *A solução ótima do problema*

$$\min_{X, Z, W} \ Tr\ (X) \tag{2.43}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{2.44}$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{2.45}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' & B_1 \\ B_1' & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{2.46}$$

fornece

$$Tr\ (X) = \min\ \|H\|_2^2 \tag{2.47}$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por

$$K = ZW^{-1} \tag{2.48}$$

Prova: Usando forma complementar de Schur e lembrando da hipótese de ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$, (2.44)-(2.45) implicam

$$X \ \geq (CW + DZ)W^{-1}(CW + DZ)' \ = \ (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \tag{2.49}$$

e portanto

$$\mathrm{Tr}\ (X) \ \geq \ \mathrm{Tr}\ ((C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})') \tag{2.50}$$

com a igualdade sendo garantida pela minimização. Além disso, a desigualdade (2.46) fornece

$$-AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' \geq B_1B_1' \tag{2.51}$$

que pode ser re-escrita

$$(A + B_2ZW^{-1})W + W(A + B_2ZW^{-1})' + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \tag{2.52}$$

indicando que $K = ZW^{-1}$ é um ganho estabilizante que assegura, na solução ótima,

$$\text{Tr}\ (X) \ = \ \min\ \|H\|_2^2 \tag{2.53}$$

□

Como as desigualdades (2.44)-(2.46) são afins nos parâmetros que descrevem o sistema (1.1), isto é, nas matrizes A, B_1, B_2, C e D, o resultado do teorema 2.2 pode ser estendido para sistemas incertos, pois o ganho K não depende explicitamente de nenhuma dessas matrizes. O problema de otimização a ser resolvido é um problema convexo, com critério linear e restrições descritas por desigualdades matriciais lineares. Restrições adicionais poderiam ainda ser incorporadas, como por exemplo, a descentralização do ganho, impondo-se Z e W bloco diagonais.

Capítulo 3

Otimização $\mathcal{H}_\infty$

3.1 Introdução

Como visto no capítulo 1, a norma da matriz de transferência em malha fechada depende do ganho de realimentação K escolhido. Este capítulo discorre sobre o problema do controle ótimo tendo como critério a norma $\mathcal{H}_\infty$.

3.2 Problema de Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$

O problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ pode ser definido a partir da caracterização de todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam um sistema:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_\infty \tag{3.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \gamma \tag{3.2}$$

sujeito a

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \tag{3.3}$$

Utilizando a relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência e a existência de uma matriz definida positiva (veja lema 1.1), o problema poderia ser formulado como

$$\min_{K \in \mathcal{K}, P} \gamma \tag{3.4}$$

tal que existe $P > \mathbf{0}$ solução de

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + (C + DK)'(C + DK) \leq \mathbf{0} \tag{3.5}$$

O problema (3.4)-(3.5) não é convexo nas variáveis de interesse, ou seja, γ, P e K.

3.3 Controlador central $\mathcal{H}_\infty$

Para $\gamma > 0$ fixo, a partir da expressão (3.5) na igualdade e da definição de um critério auxiliar, obtém-se o chamado controlador central $\mathcal{H}_\infty$.

Define-se o custo auxiliar como a função Tr $(B_1' P B_1)$ e o seguinte problema de otimização

$$\min_{K,P} \quad \text{Tr } (B_1' P B_1) \tag{3.6}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \tag{3.7}$$

Chamando de $W = W'$ a variável dual associada à restrição (3.7), o lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P, W, K) = \text{Tr } \Big\{ & B_1' P B_1 + W[(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) \\ & + \gamma^{-2} P B_1 B_1' P + (C + DK)'(C + DK)] \Big\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem (3.7),

$$(A + B_2K)W + W(A + B_2K)' + \gamma^{-2} W[P B_1 B_1' + B_1 B_1' P] + B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

$$2[D'DK + B_2' P]W = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

Para W definida positiva, a solução em termos do ganho K é única, dada por

$$K = -(D'D)^{-1} B_2' P \tag{3.11}$$

que, substituído em (3.7), fornece

$$A'P + PA + P(\gamma^{-2} B_1 B_1' - B_2 (D'D)^{-1} B_2') P + C'C = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

que é a equação de Riccati associada ao problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ [4], [34]. O controle K dado por (3.11) pertence ao conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, e é chamado de controlador central $\mathcal{H}_\infty$. Além disso, dado um $\gamma > 0$, a função custo auxiliar é tal que

$$\text{Tr } (B_1' P B_1) \ \geq \ \|H\|_2^2 \tag{3.13}$$

para quaisquer K e $P = P' > \mathbf{0}$ tais que

$$(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) + (C + DK)'(C + DK) \leq \ -\gamma^{-2} P B_1 B_1' P \leq \mathbf{0} \tag{3.14}$$

A minimização de Tr $(B_1' P B_1)$ garante o menor limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$, satisfeitas as condições que asseguram $K \in \mathcal{K}_\gamma$.

A utilização de tal função custo auxiliar permite portanto o projeto de controladores mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, mas apenas um limitante da norma $\mathcal{H}_2$ é minimizado. Embora neste caso sejam utilizadas ponderações C e D idênticas para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, o mesmo procedimento poderia tratar um sistema com uma saída distinta para cada uma das normas.

Como conclusão, a obtenção do controlador central $\mathcal{H}_\infty$ pode ser efetuada a partir da solução de uma equação matricial de Riccati, de maneira similar à do controle ótimo $\mathcal{H}_2$, graças à definição da função custo auxiliar. Entretanto, tal abordagem não permite um tratamento direto do problema de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$, já que o valor de γ teria que ser envolvido num procedimento iterativo externo à solução de (3.12). Além disso, a parametrização obtida não é convexa, dificultando a extensão para tratar sistemas incertos (note que o sinal do termo quadrático em (3.12) é indefinido).

3.4 Parametrização convexa da solução de Riccati

A caracterização do conjunto $\mathcal{K}_\gamma$ (ao menos da parcela de ganhos ótimos segundo o custo auxiliar definido em (3.6)) pode ser feita através de uma equação de Riccati (3.12). Manipulando-se adequadamente a desigualdade associada a esta última expressão, chega-se a uma parametrização convexa das soluções.

TEOREMA **3.1** *Dado $\gamma > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_\gamma$ se e somente se existir $W = W'$ tal que*

$$W > \mathbf{0} \tag{3.15}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' & B_1 & WC' \\ B_1' & \gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.16}$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \tag{3.17}$$

Prova: Para mostrar-se a necessidade, a partir da existência de um ganho $K \in \mathcal{K}_\gamma$, tem-se (pelo lema 1.1)

$$\begin{aligned} &(A + B_2K)'P + P(A + B_2K) \\ &+ \gamma^{-2}PB_1B_1'P + (C + DK)'(C + DK) \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.18}$$

que pode ser re-escrita

$$\begin{aligned} &A'P + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C'C - PB_2(D'D)^{-1}B_2'P \\ &+ [K + (D'D)^{-1}B_2'P]'(D'D)[K + (D'D)^{-1}B_2'P] \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.19}$$

Como $[K + (D'D)^{-1}B_2'P]'(D'D)[K + (D'D)^{-1}B_2'P] \geq \mathbf{0}$,

$$A'P + PA + \gamma^{-2}PB_1B_1'P + C'C \leq \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Multiplicando-se à esquerda e à direita por P^{-1}, e fazendo $W = P^{-1} > \mathbf{0}$, tem-se

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2' \leq \mathbf{0} \tag{3.21}$$

que, usando-se a forma de Schur, fornece (3.16).

Para a suficiência, aplicando a forma complementar de Schur em (3.16), com $W > \mathbf{0}$, obtém-se

$$-AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' - WC'CW \geq \gamma^{-2}B_1B_1' \tag{3.22}$$

ou ainda

$$AW + WA' + WC'CW + \gamma^{-2}B_1B_1' - B_2(D'D)^{-1}B_2' \leq \mathbf{0} \tag{3.23}$$

Multiplicando-se à esquerda e à direita por W^{-1}, tem-se

$$A'W^{-1} + W^{-1}A + C'C + \gamma^{-2}W^{-1}B_1B_1'W^{-1} - W^{-1}B_2(D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \leq \mathbf{0} \tag{3.24}$$

que pode ser re-escrita

$$(A - B_2(D'D)^{-1}B_2'W^{-1})'W^{-1} + W^{-1}(A - B_2(D'D)^{-1}B_2'W^{-1})$$
$$+ \gamma^{-2}W^{-1}B_1B_1'W^{-1} + (C - D(D'D)^{-1}B_2'W^{-1})'(C - D(D'D)^{-1}B_2'W^{-1}) \leq \mathbf{0} \quad (3.25)$$

implicando que K dado por (3.17) é um ganho estabilizante que satisfaz a condição (1.12) do lema 1.1 e, portanto, $K \in \mathcal{K}_\gamma$. □

Com o teorema 3.1, uma parametrização convexa da solução da equação de Riccati é obtida, e a partir dela os problemas de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e do controlador central podem ser abordados pela programação convexa.

TEOREMA **3.2** *A solução ótima do problema*

$$\min_{X, W} \ Tr\,(X) \quad (3.26)$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1 \\ B_1' & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.28)$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' & B_1 & WC' \\ B_1' & \gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.29)$$

fornece

$$W = P^{-1} \quad , \quad Tr\,(X) \ = \ Tr\,(B_1'W^{-1}B_1) \ \geq \ \|H\|_2^2 \quad (3.30)$$

e o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K = -(D'D)^{-1}B_2'W^{-1} \quad (3.31)$$

é tal que $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Similar às anteriores, e por isso omitida. □

TEOREMA **3.3** *A solução ótima do problema*

$$\min_{\delta, W} \ \delta \quad (3.32)$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' + B_2(D'D)^{-1}B_2' & B_1 & WC' \\ B_1' & \delta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (3.34)$$

fornece

$$W = P^{-1} \quad , \quad \sqrt{\delta} \; = \; \min \; \|H\|_\infty \tag{3.35}$$

O ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação é dado por

$$K = -(D'D)^{-1} B_2' W^{-1} \tag{3.36}$$

Prova: A equivalência entre as condições (3.33)-(3.34) e a expressão (3.14) decorre do teorema 3.1, e a minimização em δ assegura o mínimo valor de norma $\mathcal{H}_\infty$ que admite a existência de uma solução W definida positiva. □

Os resultados dos teoremas 3.1, 3.2 e 3.3 permitem tratar sistemas com as matrizes A, B_1 e C incertas, mas a expressão do ganho ainda depende explicitamente de D e B_2. Outras restrições poderiam ser incorporadas ao problema: por exemplo, se $D'D = \mathbf{I}$, para matrizes B_2 bloco diagonais, o controle descentralizado poderia ser obtido a partir da imposição de que também a solução W seja bloco diagonal.

3.5 Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_\infty$

A partir da relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência e a existência de uma matriz definida positiva que satisfaz uma desigualdade matricial estabelecida pelo lema 1.1, uma condição equivalente pode ser obtida.

LEMA **3.1** $\|H\|_\infty \le \gamma$ *se e somente se a desigualdade*

$$A_f W + W A_f' + B_1 B_1' + \gamma^{-2} W C_f' C_f W \le \mathbf{0} \tag{3.37}$$

admitir $W = W' > \mathbf{0}$ como solução.

A expressão (3.37) não envolve de maneira convexa as variáveis de interesse (o ganho K embutido nas matrizes de malha fechada A_f e C_f e a matriz W). Definindo-se um novo espaço paramétrico, obtém-se o problema convexo a seguir, que fornece como solução o ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

TEOREMA **3.4** *A solução ótima do problema*

$$\min_{\delta, W} \; \delta \tag{3.38}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{3.39}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' - B_2 Z - Z' B_2' & B_1 & WC' + Z'D' \\ B_1' & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW + DZ & \mathbf{0} & \delta \mathbf{I} \end{bmatrix} \ge \mathbf{0} \tag{3.40}$$

fornece

$$\sqrt{\delta} \; = \; \min \; \|H\|_\infty \tag{3.41}$$

O ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação é dado por

$$K = Z W^{-1} \tag{3.42}$$

Prova: Das restrições (3.39)-(3.40), obtém-se (por forma complementar de Schur)

$$-AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' - B_1B_1' \geq \delta^{-1}(CW + DZ)'(CW + DZ) \tag{3.43}$$

que pode ser re-escrita

$$\begin{aligned}(A + B_2ZW^{-1})W + W(A + B_2ZW^{-1})' \\ + \delta^{-1}W(C + DZW^{-1})'(C + DZW^{-1})W + B_1B_1' \leq \mathbf{0}\end{aligned} \tag{3.44}$$

que, com $K = ZW^{-1}$ e $\delta = \gamma^2 > 0$, iguala-se à condição (3.37) do lema 3.1. A minimização (3.38) garante o valor ótimo da norma $\mathcal{H}_\infty$. □

Para $\gamma > 0$ dado, o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser abordado a partir da definição da função custo auxiliar

$$\text{Tr}\ ((C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})') \tag{3.45}$$

que resulta no seguinte problema de otimização.

TEOREMA **3.5** *Para $\gamma > 0$ dado, a solução ótima do problema*

$$\min_{X,Z,W} \quad Tr\ (X) \tag{3.46}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{3.47}$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.48}$$

$$\begin{bmatrix} -AW - WA' - B_2Z - Z'B_2' & B_1 & WC' + Z'D' \\ B_1' & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ CW + DZ & \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{3.49}$$

fornece

$$Tr\ (X) \ = \ Tr\ (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \ \geq \ \|H\|_2^2 \tag{3.50}$$

e o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K = ZW^{-1} \tag{3.51}$$

é tal que $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Pelo teorema 3.4, K dado por (3.51) pertence a $\mathcal{K}_\gamma$. A partir de (3.48), usando a forma complementar de Schur, tem-se

$$X \ \geq \ (CW + DZ)W^{-1}(CW + DZ) \ = \ (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \tag{3.52}$$

e portanto, com $K = ZW^{-1}$,

$$\text{Tr}\ (X) \ \geq \ \text{Tr}\ (C_fWC_f') \ \geq \ \|H\|_2^2 \tag{3.53}$$

A função objetivo (3.46) garante o menor limitante verificadas as demais condições que asseguram $K \in \mathcal{K}_\gamma$. □

Como as desigualdades (3.39)-(3.40) e (3.47) são afins nas matrizes A, B_1, B_2, C e D, e o ganho ótimo K não depende explicitamente dessas matrizes, o resultado dos teoremas 3.3 e 3.4 pode ser estendido para sistemas incertos. Nos dois casos, o problema de otimização associado é um problema convexo, tendo portanto garantida a convergência para a solução ótima global. Restrições adicionais poderiam ainda ser incorporadas, como por exemplo, a descentralização do ganho, impondo-se Z e W bloco diagonais.

Parte II

Sistemas Discretos no Tempo

Capítulo 4

Definições e preliminares

Os sistemas lineares invariantes no tempo aqui considerados são descritos por equações de estado a diferenças

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + B_1 w_k + B_2 u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{cases} \tag{4.1}$$

nas quais $x \in \Re^n$ é o vetor de estado, $u \in \Re^m$ é o vetor de controle, $w \in \Re^l$ é o vetor de distúrbios e $y \in \Re^r$ é o vetor de saída controlada. As matrizes A, B_1, B_2, C e D têm dimensões apropriadas e são supostas conhecidas. Assume-se também:

i) $C'D = \mathbf{0}$ (ortogonalidade);

ii) $D'D > \mathbf{0}$ (ponderação positiva no controle).

A hipótese i) não acarreta perda de generalidade, tornando as expressões matemáticas mais simples, e ii) é necessária para assegurar a existência de ganhos finitos.

O problema a ser investigado é o de controle por realimentação de estado, isto é, a lei de controle é dada por

$$u = Kx \tag{4.2}$$

com $K \in \Re^{m \times n}$ a determinar. A partir de (1.2), definem-se as matrizes de malha fechada

$$A_f \triangleq A + B_2 K \tag{4.3}$$

$$C_f \triangleq C + DK \tag{4.4}$$

De particular interesse é o conjunto de ganhos estabilizantes definido por

$$\mathcal{K} \triangleq \{K \ : \ A_f \text{ é assint. estável } \} \tag{4.5}$$

isto é, todos os autovalores do sistema em malha fechada estão no interior do circulo unitário centrado na origem do plano complexo. A matriz de transferência de w para y é dada por

$$H(z) = C_f \left(z\mathbf{I} - A_f\right)^{-1} B_1 \tag{4.6}$$

e, para $K \in \mathcal{K}$ e $z = \exp(j\omega)$, define-se a norma $\mathcal{H}_2$ por

$$\|H\|_2^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr } \{H[\exp(j\omega)]^* H[\exp(j\omega)]\} d\omega \tag{4.7}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de uma matriz de transferência estável pode ser calculada a partir dos gramianos de controlabilidade L_c e observabilidade L_o, isto é, das matrizes simétricas soluções, respectivamente, das equações

$$A_f L_c A_f' - L_c + B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

$$A_f' L_o A_f - L_o + C_f' C_f = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

resultando

$$\|H\|_2^2 \ = \ \text{Tr}\ (B_1' L_o B_1) = \text{Tr}\ (C_f L_c C_f') \tag{4.10}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência é definida por

$$\|H\|_\infty \ \triangleq \ \max_{\omega \in [-\pi,\pi]} \ \sigma_{max}\ \{H[\exp(j\omega)]\} \tag{4.11}$$

e pode ser calculada a partir da relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma $\mathcal{H}_\infty$ e a existência de uma matriz definida positiva P [37], [18], [35]:

LEMA **4.1** $\|H\|_\infty \leq \gamma$ *se e somente se a desigualdade*

$$A_f' P A_f - P + C_f' C_f + \gamma^{-2} P B_1 (\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1' P B_1)^{-1} B_1' P \leq \mathbf{0} \tag{4.12}$$

admitir $P = P' > \mathbf{0}$ *como solução.*

A partir do lema 4.1, um procedimento iterativo pode ser formulado para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$, no qual baixa-se gradativamente o valor de γ até o limite de existência de uma solução definida positiva P para (4.12).

4.1 Problemas de controle e perspectivas

Da seção anterior, alguns problemas de controle podem ser formulados.

A caracterização do conjunto de ganhos estabilizantes $\mathcal{K}$ sob o ponto de vista da análise convexa foi abordada por exemplo em [7], [8]. Com a escolha de um espaço paramétrico adequado, os ganhos estabilizantes podem ser obtidos a partir de um conjunto convexo, possibilitando assim a extensão dos resultados para sistemas incertos (o chamado problema de estabilização quadrática [8], [23]).

Com a definição de um critério de desempenho baseado na norma da matriz de transferência, dois problemas de controle se colocam: o de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ [20], e o de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e suas extensões para o caso incerto (chamados de problemas de custo garantido [13], [24]).

Utilizando a relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ e a existência de uma matriz definida positiva expressa pelo lema 4.1, pode-se caracterizar o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, isto é,

$$\mathcal{K}_\gamma \ \triangleq \ \{K \ : \ A_f \text{ é assint. estável e } \|H\|_\infty \leq \gamma \ \} \tag{4.13}$$

de maneira convexa, permitindo assim a extensão para o caso incerto, o chamado problema de estabilidade quadrática com nível γ prescrito de atenuação de distúrbios [15].

Uma vez caracterizado o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, outro critério de desempenho pode determinar a escolha particular do elemento $K \in \mathcal{K}_\gamma$. Se, por exemplo, a norma $\mathcal{H}_2$ é escolhida, tem-se o chamado problema de controle misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Com a definição de um custo auxiliar, que é um limitante superior da norma $\mathcal{H}_2$, a análise convexa fornece uma solução aproximada para o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ [16], [38].

Extensões dos problemas mencionados acima envolvem, por exemplo, o problema do controle descentralizado [5]; o problema de realimentação de saída [17], [27], [30]; o problema de controle com alocação de pólos em subregiões do plano complexo [32].

Capítulo 5

Otimização $\mathcal{H}_2$

5.1 Introdução

Da discussão realizada no capítulo II, fica clara a dependência da matriz de transferência em malha fechada em relação a uma particular escolha do ganho de realimentação K. Este capítulo discorre sobre o problema do controle ótimo tendo como critério a norma $\mathcal{H}_2$.

5.2 Problema de Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$

A partir da caracterização de todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam um sistema, define-se o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_2$:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_2^2 \tag{5.1}$$

Utilizando a relação entre os gramianos de controlabilidade e de observabilidade com a norma $\mathcal{H}_2$, podem-se definir os problemas equivalentes:

$$\min_{K \in \mathcal{K},\, P} \text{Tr } (B_1' P B_1) \tag{5.2}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \tag{5.3}$$

ou ainda

$$\min_{K \in \mathcal{K},\, W} \text{Tr } ((C + DK)W(C + DK)') \tag{5.4}$$

sujeito a

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

Deixando de lado, por enquanto, a restrição $K \in \mathcal{K}$ e tomando (5.2), tem-se:

$$\min_{K,\, P} \text{Tr } (B_1' P B_1) \tag{5.6}$$

sujeito a

$$W \quad : \quad (A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \tag{5.7}$$

sendo $W = W'$ a variável dual associada à restrição (5.7). O lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ é dado por

$$\mathcal{L}(P, W, K) = \mathrm{Tr}\Big\{B_1' P B_1 + W[(A+B_2K)'P(A+B_2K) - P + (C+DK)'(C+DK)]\Big\} \quad (5.8)$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

$$2\left[D'DK + B_2'PB_2K + B_2'PA\right] W = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

Se a matriz W for definida positiva, a solução ótima em termos do ganho K é única, assegurando a estabilidade do sistema em malha fechada, dada por

$$K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA \quad (5.12)$$

que, substituído em (5.10), fornece

$$A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C = \mathbf{0} \quad (5.13)$$

que é a equação de Riccati para sistemas discretos no tempo. O valor ótimo da norma $\mathcal{H}_2$ é dado portanto por

$$\min \ \|H\|_2^2 \ = \ \mathrm{Tr}\ (B_1'PB_1) \quad (5.14)$$

para P solução de (5.13).

A garantia de que o ganho K dado por (5.12) é um ganho estabilizante vem da equação (5.10), podendo ser verificada com a escolha da função de Lyapunov $v(x) = x'Px$. Da equação (5.9), a matriz W será definida positiva sempre que (A_f, B_1') for observável; uma condição suficiente para tal é dada por rank $B_1 = n$. Observe que as mesmas condições de otimalidade podem ser obtidas da minimização de Tr (C_fWC_f') sujeito a (5.5).

5.3 Relação com o Problema Linear Quadrático

O problema de controle ótimo por realimentação de estado tendo como índice de desempenho um critério quadrático ficou conhecido como o problema do Regulador Linear Quadrático [1], e pode ser colocado assim:

$$\min_{K} \ J = \sum_{k=0}^{\infty} \ y'y \quad (5.15)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + B_2u_k \ \ , \ \ x_0 && (5.16)\\ y_k &= Cx_k + Du_k && (5.17) \end{aligned}$$

com as hipóteses $C'D = \mathbf{0}$ e $D'D > \mathbf{0}$. A solução ótima é dada por

$$K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA \quad (5.18)$$

com $P = P' > \mathbf{0}$ solução da equação de Riccati

$$A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C = \mathbf{0} \tag{5.19}$$

e o valor ótimo do critério é

$$J^* = x_0'Px_0 \tag{5.20}$$

com P solução de (5.19). Portanto, o ganho ótimo K coincide com aquele obtido da minimização da norma $\mathcal{H}_2$, ambos dependentes da solução da equação de Riccati (5.19). O valor do critério iguala o valor mínimo da norma $\mathcal{H}_2$ sempre que

$$x_0'Px_0 = \text{Tr}\ (B_1'PB_1) \tag{5.21}$$

ou seja, sempre que

$$x_0x_0' = B_1B_1' \tag{5.22}$$

5.4 Parametrização convexa da solução de Riccati

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ (5.6) poderia ser formulado trocando-se a restrição de igualdade (5.7) por uma restrição de menor ou igual, pois a função objetivo aliada ao fato da matriz P ser definida positiva garante, no ótimo, que a igualdade é satisfeita. Assim, um problema equivalente pode ser definido

$$\min_{P}\ \text{Tr}\ (B_1'PB_1) \tag{5.23}$$

sujeito a

$$P > \mathbf{0} \tag{5.24}$$

$$A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C \leq \mathbf{0} \tag{5.25}$$

mas (5.25) não é uma restrição convexa na variável P.

Através de manipulações algébricas chega-se ao seguinte problema convexo, que fornece como solução ótima $W = P^{-1}$.

Teorema **5.1** *A solução ótima do problema*

$$\min_{X,W}\ Tr\ (X) \tag{5.26}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{5.27}$$

$$\begin{bmatrix} W & B_1 \\ B_1' & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{5.28}$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' & WA' \\ CW & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ AW & \mathbf{0} & W + B_2(D'D)^{-1}B_2' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{5.29}$$

fornece

$$W = P^{-1} \quad , \quad Tr\ (X) \ = \ \min\ \|H\|_2^2 \tag{5.30}$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por

$$K = -(D'D + B_2'W^{-1}B_2)^{-1}B_2'W^{-1}A \tag{5.31}$$

Prova: Usando forma complementar de Schur [3], (5.27)-(5.28) implicam

$$X \geq B_1' W^{-1} B_1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Tr}\ (X) \ \geq \ \mathrm{Tr}\ (B_1' W^{-1} B_1) \tag{5.32}$$

e a minimização em X garante a igualdade. A desigualdade (5.29) implica

$$W - WC'CW \geq WA'[W + B_2(D'D)^{-1}B_2']^{-1}AW \tag{5.33}$$

que por sua vez fornece[1]

$$WA' \left[W^{-1} - W^{-1}B_2(D'D + B_2'W^{-1}B_2)^{-1}B_2'W^{-1}\right] AW - W + WC'CW \leq \mathbf{0} \tag{5.34}$$

Multiplicando à esquerda e à direita por W^{-1}, tem-se

$$A'W^{-1}A - W^{-1} - A'W^{-1}B_2(D'D + B_2'W^{-1}B_2)^{-1}B_2'W^{-1}A + C'C \leq \mathbf{0} \tag{5.35}$$

que, com $W^{-1} = P$, iguala-se a (5.25). □

O teorema 5.1 proporciona uma parametrização convexa da solução da equação de Riccati, e portanto, através da relação (5.31), de todos os ganhos estabilizantes K que são ótimos para alguma escolha particular das matrizes de ponderação C e D do problema de otimização $\mathcal{H}_2$ (consequentemente, um subconjunto de $\mathcal{K}$, já que este último contém todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam o sistema (4.1)). Além disso, pode-se mostrar que o sistema (4.1) é estabilizável se e somente se existir $P = P' > \mathbf{0}$ que verifique (5.25).

Corolário **5.1** *O sistema (4.1) é estabilizável se e somente se existir $P = P' > \mathbf{0}$ tal que*

$$A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C \leq \mathbf{0} \tag{5.36}$$

No caso afirmativo, ganho estabilizante é dado por

$$K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA \tag{5.37}$$

Prova: Se o sistema é estabilizável, então $\exists\ K$ e $P = P' > \mathbf{0}$ tais que

$$(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK) \leq \mathbf{0} \tag{5.38}$$

que pode ser re-escrita (lembrando que $C'D = \mathbf{0}$)

$$\begin{aligned} & A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA + C'C \\ & + [K + (D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA]'(D'D + B_2'PB_2)[K + (D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA] \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.39}$$

Como $[K + (D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA]'(D'D + B_2'PB_2)[K + (D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA] \geq \mathbf{0}$, a expressão (5.36) é satisfeita.

Para provar a suficiência, re-escreve-se (5.36) como

$$(A - B_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA)'P(A - B_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA) - P$$

[1] Lema da inversa: $(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$.

$$+ (C - D(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA)'(C - D(D'D + B_2'PB_2)^{-1}B_2'PA) \leq \mathbf{0} \quad (5.40)$$

e como $P > \mathbf{0}$, com o ganho K dado por (5.37) o sistema em malha fechada é assintoticamente estável. □

O resultado do teorema 5.1, entretanto, não permite a extensão para tratar sistemas com as matrizes A, B_2 e D incertas, pois a expressão do ganho depende explicitamente dessas matrizes. Nem mesmo o controle descentralizado poderia ser obtido, pois apenas estruturas muito particulares (e portanto restritivas) garantiriam K dado por (5.31) bloco diagonal.

5.5 Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_2$

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ (5.6) poderia ser formulado a partir de (5.4)-(5.5), trocando-se esta última equação por uma desigualdade, ou seja,

$$\min_{K \in \mathcal{K}, W} \ \mathrm{Tr}\ ((C + DK)W(C + DK)') \quad (5.41)$$

sujeito a

$$(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' \leq \mathbf{0} \quad (5.42)$$

Com hipóteses adicionais, como por exemplo a observabilidade do par (A_f, B_1'), ou ainda rank $B_1 = n$, os pares (W, K) com $W > \mathbf{0}$ que satisfazem (5.42) parametrizam todo o espaço de ganhos estabilizantes, isto é

$$\exists\ K \in \mathcal{K} \iff \exists\ K, W > \mathbf{0} \text{ tais que (5.42) é satisfeita} \quad (5.43)$$

Porém, o problema (5.41)-(5.42) não é convexo nas variáveis (K, W).

Definindo-se um novo espaço paramétrico chega-se ao problema convexo abaixo, que fornece como solução o ganho ótimo $\mathcal{H}_2$.

Teorema **5.2** *A solução ótima do problema*

$$\min_{X, Z, W} \ Tr\ (X) \quad (5.44)$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \quad (5.45)$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (5.46)$$

$$\begin{bmatrix} W & AW + B_2Z & B_1 \\ WA' + Z'B_2' & W & \mathbf{0} \\ B_1' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (5.47)$$

fornece

$$Tr\ (X) \ = \ \min\ \|H\|_2^2 \quad (5.48)$$

O ganho ótimo de realimentação é dado por

$$K = ZW^{-1} \quad (5.49)$$

Prova: Usando forma complementar de Schur e lembrando da hipótese de ortogonalidade $C'D = \mathbf{0}$, (5.45)-(5.46) implicam

$$X \ \geq (CW + DZ)W^{-1}(CW + DZ)' \ = \ (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \tag{5.50}$$

e portanto

$$\text{Tr } (X) \ \geq \ \text{Tr } (C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \tag{5.51}$$

com a igualdade sendo garantida pela minimização. Além disso, a desigualdade (5.47) fornece

$$W - B_1 B_1' \geq (AW + B_2 Z)W^{-1}(AW + B_2 Z)' \tag{5.52}$$

que pode ser re-escrita

$$(A + B_2 ZW^{-1})W(A + B_2 ZW^{-1})' - W + B_1 B_1' \leq \mathbf{0} \tag{5.53}$$

indicando que $K = ZW^{-1}$ é um ganho estabilizante que assegura, na solução ótima,

$$\text{Tr } (X) \ = \ \min \ \|H\|_2^2 \tag{5.54}$$

□

Como as desigualdades (5.45)-(5.47) são afins nos parâmetros que descrevem o sistema (1.1), isto é, nas matrizes A, B_1, B_2, C e D, o resultado do teorema 5.2 pode ser estendido para sistemas incertos, pois o ganho K não depende explicitamente de nenhuma dessas matrizes. O problema de otimização a ser resolvido é um problema convexo, com critério linear e restrições descritas por desigualdades matriciais lineares.

Capítulo 6

Otimização $\mathcal{H}_\infty$

6.1 Introdução

Como visto no capítulo II, a norma da matriz de transferência em malha fechada depende do ganho de realimentação K escolhido. Este capítulo discorre sobre o problema do controle ótimo tendo como critério a norma $\mathcal{H}_\infty$.

6.2 Problema de Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$

O problema de otimização $\mathcal{H}_\infty$ pode ser definido a partir da caracterização de todos os ganhos de realimentação de estado que estabilizam um sistema:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H\|_\infty \tag{6.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \gamma \tag{6.2}$$

sujeito a

$$\|H\|_\infty \leq \gamma \tag{6.3}$$

Utilizando a relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência e a existência de uma matriz definida positiva (veja lema 4.1), o problema poderia ser formulado como

$$\min_{K \in \mathcal{K}, P} \gamma \tag{6.4}$$

tal que existe $P > \mathbf{0}$ solução de

$$\begin{aligned}(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P + (C + DK)'(C + DK)&\\ + \gamma^{-2}PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B_1'PB_1)^{-1}B_1'P \leq \mathbf{0}&\end{aligned} \tag{6.5}$$

O problema (6.4)-(6.5) não é convexo nas variáveis de interesse, ou seja, γ, P e K.

6.3 Controlador central $\mathcal{H}_\infty$

Para $\gamma > 0$ fixo, a partir da expressão (6.5) na igualdade e da definição de um critério auxiliar, obtém-se o chamado controlador central $\mathcal{H}_\infty$.

Define-se o custo auxiliar como a função Tr $(B_1' P B_1)$ e o seguinte problema de otimização

$$\min_{K,P} \ \text{Tr}\ (B_1' P B_1) \tag{6.6}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}&(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P \\ &+ \gamma^{-2} PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'P + (C + DK)'(C + DK) = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{6.7}$$

Chamando de $W = W'$ a variável dual associada à restrição (6.7), o lagrangeano $\mathcal{L}(P, W, K)$ é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P, W, K) = \text{Tr}\ \Big\{&B_1'PB_1 + W[(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P \\ &+ \gamma^{-2} PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'P + (C + DK)'(C + DK)]\Big\}\end{aligned} \tag{6.8}$$

As condições necessárias de otimalidade fornecem (6.7),

$$\begin{aligned}&(A + B_2K)W(A + B_2K)' - W + B_1B_1' \\ &+ \gamma^{-2} B_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'PW + \gamma^{-2} WPB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1' \\ &-\gamma^{-4} B_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'PWPB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'\mathbf{0}\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$2\left[D'DK + B_2'PB_2K + B_2'PA\right] W = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

Para W definida positiva, a solução em termos do ganho K é única, dada por

$$K = -(D'D + B_2'PB_2)^{-1} B_2'PA \tag{6.11}$$

que, substituído em (6.7), fornece

$$\begin{aligned}&A'PA - P - A'PB_2(D'D + B_2'PB_2)^{-1} B_2'PA \\ &\qquad + C'C + \gamma^{-2} PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'P = \mathbf{0}\end{aligned} \tag{6.12}$$

que é a equação de Riccati associada ao problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ [37]. O controle K dado por (6.11) pertence ao conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, e é chamado de controlador central $\mathcal{H}_\infty$. Além disso, dado um $\gamma > 0$, a função custo auxiliar é tal que

$$\text{Tr}\ (B_1'PB_1) \ \geq \ \|H\|_2^2 \tag{6.13}$$

para quaisquer K e $P = P' > \mathbf{0}$ tais que

$$\begin{aligned}&(A + B_2K)'P(A + B_2K) - P \\ &+ \gamma^{-2} PB_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2} B_1'PB_1)^{-1} B_1'P + (C + DK)'(C + DK) \leq \mathbf{0}\end{aligned} \tag{6.14}$$

A minimização de Tr $(B_1'PB_1)$ garante o menor limitante para a norma $\mathcal{H}_2$, satisfeitas as condições que asseguram $K \in \mathcal{K}_\gamma$.

A utilização de tal função custo auxiliar permite portanto o projeto de controladores mistos $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, mas apenas um limitante da norma $\mathcal{H}_2$ é minimizado. Embora neste caso sejam utilizadas ponderações C e D idênticas para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, o mesmo procedimento poderia tratar um sistema com uma saída distinta para cada uma das normas.

Como conclusão, a obtenção do controlador central $\mathcal{H}_\infty$ pode ser efetuada a partir da solução de uma equação matricial de Riccati, de maneira similar à do controle ótimo $\mathcal{H}_2$, graças à definição da função custo auxiliar. Entretanto, tal abordagem não permite um tratamento direto do problema de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$, já que o valor de γ teria que ser envolvido num procedimento iterativo externo à solução de (6.12). Além disso, a parametrização obtida não é convexa, dificultando a extensão para tratar sistemas incertos (note também que o ganho K depende explicitamente das matrizes do sistema).

6.4 Parametrização convexa da solução de Riccati

A caracterização do conjunto $\mathcal{K}_\gamma$ (ao menos da parcela de ganhos ótimos segundo o custo auxiliar definido em (6.6)) pode ser feita através de uma equação de Riccati (6.12). Manipulando-se adequadamente a desigualdade associada a esta última expressão, chega-se a uma parametrização convexa das soluções.

Teorema **6.1** *Para $\gamma > 0$ dado, considere o seguinte problema de otimização:*

$$\min_{W,X} \; Tr\ (X) \tag{6.15}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{6.16}$$

$$\begin{bmatrix} X & B_1' \\ B_1 & W \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.17}$$

$$\begin{bmatrix} W & \gamma^{-1}B_1 & WC' & WA' \\ \gamma^{-1}B_1' & \mathbf{I}+\gamma^{-2}X & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ CW & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ AW & \mathbf{0} & \mathbf{0} & W+B_2(D'D)^{-1}B_2' \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.18}$$

Se a solução ótima é tal que

$$X = B_1'W^{-1}B_1 \tag{6.19}$$

então

$$P = W^{-1} \quad , \quad Tr\ (X) = Tr\ (B_1'W^{-1}B_1) \;\geq\; \|H\|_2^2 \tag{6.20}$$

e o ganho do controlador central $\mathcal{H}_\infty$ que assegura $\|H\|_\infty \leq \gamma$ é dado por

$$K = -(D'D + B_2'W^{-1}B_2)^{-1}B_2'W^{-1}A \tag{6.21}$$

Prova: Usando complemento de Schur, as restrições (6.16) e (6.18), com (6.19) satisfeita, implicam

$$\begin{aligned} W - \gamma^{-2}B_1(\mathbf{I} - \gamma^{-2}B_1'W^{-1}B_1)^{-1}B_1' \\ - WC'CW - WA'(W + B_2(D'D)^{-1}B_2')^{-1}AW \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.22}$$

que, multiplicada à esquerda e à direita por W^{-1} fornece

$$\begin{aligned} A'(W + B_2(D'D)^{-1}B_2')^{-1}A - W^{-1} \\ + \gamma^{-2}W^{-1}B_1(\mathbf{I} - \gamma^{-2}B_1'W^{-1}B_1)^{-1}B_1'W^{-1} + C'C \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.23}$$

Aplicando-se o Lema da Inversa (veja a nota ao pé da página 27) no primeiro termo, obtém-se

$$\begin{aligned} A'W^{-1}A - A'W^{-1}B_2(D'D + B_2'W^{-1}B_2)^{-1}B_2'W^{-1}A - W^{-1} \\ +\gamma^{-2}W^{-1}B_1(\mathbf{I} + \gamma^{-2}B_1'W^{-1}B_1)^{-1}B_1'W^{-1} + C'C \leq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.24}$$

que é exatamente a equação de Riccati (6.12) com $P = W^{-1}$ e a desigualdade no lugar da igualdade. Com o ganho K dado por (6.21), a equação (6.24) pode ser re-escrita como (6.14), e com $X = B_1'W^{-1}B_1$ tem-se

$$\mathrm{Tr} \ \geq \ \|H\|_2^2 \tag{6.25}$$

$\square$

Com o teorema 6.1, uma parametrização convexa da solução da equação de Riccati é obtida, fornecendo como resultado o chamado controlador central $\mathcal{H}_\infty$. Entretanto, as condições são apenas necessárias para que o ganho resultante K pertença ao conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, estando a suficiência sujeita a um teste posterior (a verificação da igualdade $X = B_1'W^{-1}B_1$). Esse fato impede, de imediato, o tratamento do problema ótimo $\mathcal{H}_\infty$. Além disso, como o ganho K depende explicitamente das matrizes do sistema, a extensão dos resultados para tratar sistemas incertos não é possível e, para a descentralização, exigiria hipóteses muito restritivas.

6.5 Parametrização convexa do problema $\mathcal{H}_\infty$

A partir da relação entre a norma $\mathcal{H}_\infty$ de uma matriz de transferência e a existência de uma matriz definida positiva que satisfaz uma desigualdade matricial estabelecida pelo lema 4.1, condições equivalentes podem ser obtidas [19], [35], [37].

Lema **6.1** $\|H\|_\infty \leq \gamma$ *se e somente se a desigualdade*

$$A_fPA_f' - P + PC_f'(\mathbf{I} + C_fPC_f')^{-1}C_fP + \gamma^{-2}B_1B_1' = \mathbf{0} \tag{6.26}$$

admitir $P = P' > \mathbf{0}$ como solução.

Lema **6.2** $\|H\|_\infty \leq \gamma$ *se e somente se a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} A_f \\ C_f \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} A_f' & C_f' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.27}$$

admitir $Y = Y' > \mathbf{0}$ como solução.

A relação entre os resultados dos lemas 6.1 e 6.2 é dada por [38]:

Lema **6.3** *Suponha que $P = P' > \mathbf{0}$ satisfazendo o lema 6.1 exista. Então:*

a) *A matriz simétrica definida positiva $\hat{Y}$ dada por*

$$\hat{Y} = \gamma^2 (P^{-1} + C_f' C_f)^{-1} \tag{6.28}$$

é tal que

$$A_f \hat{Y} A_f' - \hat{Y} + A_f \hat{Y} C_f' (\gamma^2 \mathbf{I} - C_f \hat{Y} C_f')^{-1} C_f \hat{Y} A_f' + B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{6.29}$$

b) *Qualquer $Y = Y' > \mathbf{0}$ satisfazendo o lema 6.2 é tal que $\hat{Y} \leq Y$.*

Prova: Para mostrar o item a), multiplica-se (6.29) por γ^{-2} obtendo-se

$$A_f [\gamma^{-2} \hat{Y} + \gamma^{-2} \hat{Y} C_f' (\gamma^2 \mathbf{I} - C_f \hat{Y} C_f')^{-1} C_f \hat{Y}] A_f' - \gamma^{-2} \hat{Y} + \gamma^{-2} B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{6.30}$$

Usando o lema de inversão de matrizes (nota ao pé da página 27), tem-se

$$A_f [\gamma^{-2} (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2} C_f' C_f)^{-1}] A_f' - \gamma^{-2} \hat{Y} + \gamma^{-2} B_1 B_1' = \mathbf{0} \tag{6.31}$$

Denotando

$$P = \gamma^{-2} (\hat{Y}^{-1} - \gamma^{-2} C_f' C_f)^{-1} \tag{6.32}$$

e manipulando as equações (6.31) e (6.32), obtém-se $\hat{Y}$ dado por (6.28), seguindo-se daí a equivalência entre (6.29) e (6.26). O item b) decorre de propriedades da equação matricial discreta de Riccati [33]. □

Os resultados dos lemas anteriores não envolvem de maneira convexa as variáveis de interesse (o ganho K aparece embutido nas matrizes de malha fechada A_f e C_f). Definindo-se um novo espaço paramétrico, obtém-se uma caracterização convexa do conjunto $\mathcal{K}_\gamma$.

Teorema **6.2** *Dado $\gamma > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_\gamma$ se e somente se existir $W = W'$, $X = X'$ e Z tais que*

$$W > \mathbf{0} \tag{6.33}$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_1 B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.35}$$

No caso afirmativo, o ganho é dado por

$$K = Z W^{-1} \tag{6.36}$$

Prova: Primeiramente, a necessidade. Pelo lema 6.2, dado $\gamma > 0$, existe $K \in \mathcal{K}_\gamma$ se e somente se existir $Y = Y' > \mathbf{0}$ tal que

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K) \\ (C+DK) \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} (A+B_2K)' & (C+DK)' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

que pode ser re-escrita

$$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & YK' \\ KY & KYK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A' & C' \\ B_2' & D' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & YK' \\ KY & KYK' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{6.38}$$

indicando que as matrizes $W = Y$, $X = KYK'$ e $Z = KY$ satisfazem as condições (6.33)-(6.35) do teorema.

A suficiência é mostrada como segue. Das condições (6.33) e (6.35), obtém-se

$$\begin{bmatrix} A+B_2ZW^{-1} \\ C+DZW^{-1} \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} (A+B_2ZW^{-1})' & (C+DZW^{-1})' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D \end{bmatrix} \left[X - ZW^{-1}Z'\right] \begin{bmatrix} B_2' & D' \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{6.39}$$

A restrição (6.34) implica $X \geq ZW^{-1}Z'$. Consequentemente, de (6.39), com $K = ZW^{-1}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} A_f \\ C_f \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} A_f' & C_f' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{6.40}$$

que, pelo lema 6.2, assegura $\|H\|_\infty \leq \gamma$. Em outras palavras, K dado por (6.36) pertence a $\mathcal{K}_\gamma$ □

A partir da caracterização convexa do conjunto $\mathcal{K}_\gamma$, os problemas de controle $\mathcal{H}_\infty$ são resolvidos de maneira convexa. O teorema a seguir fornece como solução o ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$.

Teorema **6.3** *A solução ótima do problema*

$$\min_{\delta, X, Z, W} \delta \tag{6.41}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{6.42}$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.43}$$

$$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \delta \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{6.44}$$

fornece

$$\sqrt{\delta} \;=\; \min \; \|H\|_\infty \tag{6.45}$$

O ganho ótimo $\mathcal{H}_\infty$ de realimentação é dado por

$$K = ZW^{-1} \tag{6.46}$$

Prova: Pelo teorema 6.2, o conjunto $\mathcal{K}_\gamma$ é parametrizado de maneira convexa através da existência de matrizes W, X e Z soluções para as restrições (6.33)-(6.35), com o ganho dado por (6.46). A minimização (6.41) garante a otimalidade. □

Com o teorema 6.2, o conjunto de ganhos $\mathcal{K}_\gamma$ é inteiramente parametrizado em um conjunto convexo, definido pelas matrizes X, Z e W factíveis para o problema (6.33)-(6.36). A partir daí, torna-se possível abordar o problema de controle ótimo $\mathcal{H}_\infty$ através de um procedimento global de otimização, que envolve de maneira conjunta o limitante δ e as variáveis de interesse X, Z e W e é convexo, tendo portanto garantida a convergência para o ótimo global.

Para $\gamma > 0$ dado, o problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pode ser abordado a partir da definição da função custo auxiliar

$$\text{Tr}\;((C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})') \tag{6.47}$$

resultando no seguinte problema de otimização:

Teorema **6.4** *Para $\gamma > 0$ dado, a solução ótima do problema*

$$\min_{V, X, Z, W} \quad Tr\;(V) \tag{6.48}$$

sujeito a

$$W > \mathbf{0} \tag{6.49}$$

$$\begin{bmatrix} W & WC' + Z'D' \\ CW + DZ & V \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.50}$$

$$\begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{6.51}$$

$$\begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C & D \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} B_1B_1' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \gamma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{6.52}$$

fornece

$$Tr\;(V) \;=\; Tr\;(C + DZW^{-1})W(C + DZW^{-1})' \;\geq\; \|H\|_2^2 \tag{6.53}$$

e o ganho ótimo de realimentação dado por

$$K = ZW^{-1} \tag{6.54}$$

é tal que $\|H\|_\infty \leq \gamma$.

Prova: Pelo teorema 6.2, com as condições (6.49), (6.51) e (6.52) satisfeitas, o ganho de realimentação de estados dado por (6.54) pertence a $\mathcal{K}_\gamma$. A partir de (6.50), usando a forma complementar de Schur, tem-se

$$V \;\geq\; (CW+DZ)W^{-1}(CW+DZ)' \;=\; (C+DZW^{-1})W(C+DZW^{-1})' \tag{6.55}$$

e portanto, com $K = ZW^{-1}$,

$$\text{Tr }(V) \;\geq\; \text{Tr }(C_f W C_f') \;\geq\; \|H\|_2^2 \tag{6.56}$$

A função objetivo (6.48) garante o menor limitante verificadas as demais condições que asseguram $K \in \mathcal{K}_\gamma$. □

Como as desigualdades apresentadas pelos teoremas 6.2, 6.3 e 6.4 são afins nas matrizes A, B_1, B_2, C e D, e o ganho ótimo K não depende explicitamente dessas matrizes, os resultados podem ser estendidos para sistemas incertos. Os problemas de otimização associados são problema convexos, tendo portanto garantida a convergência para a solução ótima global. Restrições adicionais poderiam ainda ser incorporadas, como por exemplo, a descentralização do ganho, impondo-se Z e W bloco diagonais.

Conclusões e Perspectivas

De maneira sucinta, este trabalho expôs alguns resultados de controle $\mathcal{H}_2$ e controle $\mathcal{H}_\infty$, para sistemas lineares, contínuos e discretos no tempo, em forma de desigualdades matriciais lineares — LMIs.

Duas vantagens principais da formulação adotada são: facilidade de solução numérica (hoje existem inúmeros pacotes computacionais especializados em LMIs) e a extensão imediata para o tratamento de sistemas com incertezas paramétricas, resultando no chamado controle de custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, ou simplesmente controle robusto.

A lista das perspectivas de trabalhos seguindo essa linha seria muito extensa e diversificada (uma boa idéia da potencialidade das LMIs pode ser obtida na referência [3]); para citar algumas, por exemplo, há o problema de filtragem robusta, o de redução de ordem de modelos, a junção de outras técnicas de controle e filtragem robusta (como por exemplo a teoria dos modos deslizantes) com critérios de otimização $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$, além de inúmeras possíveis aplicações.

Referências Bibliográficas

[1] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall International, Inc., USA, 1989.

[2] J. Bernussou, P. L. D. Peres, and J. C. Geromel. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *System & Control Letters*, 13:65–72, 1989.

[3] S. P. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.

[4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. Francis. State space solutions to the standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34:831–847, 1989.

[5] J. C. Geromel, J. Bernussou, and P. L. D. Peres. Decentralized control through parameter space optimization. *Automatica*, 30(10):1565–1578, 1994.

[6] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. Stabilizability of uncertain linear systems via linear programming. In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 1771–1775, Austin, USA, 1988.

[7] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. Stabilizability of uncertain dynamical systems: the continuous and discrete case. In *Proceedings of the 11st IFAC World Congress on Automatic Control*, volume 1, pages 135–140, Tallinn, USSR, 1990.

[8] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and J. Bernussou. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 29:381–402, 1991.

[9] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. de Souza. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *System & Control Letters*, 19:23–27, 1992.

[10] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems with prescribed $\mathcal{H}_\infty$ norm bounds. In *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems*, volume 1, pages 302–307, Zurich, Switzerland, 1991.

[11] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time linear systems. In *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3717–3722, Tucson, USA, 1992.

[12] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of the output feedback structural constraint. In *Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1363–1364, San Antonio, USA, 1993.

[13] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_2$ guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. *International Journal of Control*, 57(4):853–864, 1993.

[14] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Output feedback stabilization of uncertain systems througout a Min/Max problem. In *Proceedings of the 12th IFAC World Congress on Automatic Control*, volume 6, pages 35–38, Sidney, Australia, 1993.

[15] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ control of discrete-time uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1072–1075, 1994.

[16] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. A convex approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problem for discrete-time uncertain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(6):1816–1833, 1995.

[17] J. C. Geromel, P. L. D. Peres, and S. R. Souza. Convex analysis of output feedback control problems: robust stability and performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7):997–1003, 1996.

[18] P. A. Iglesias and K. Glover. State space approach to discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control. *International Journal of Control*, 54:1031–1073, 1991.

[19] I. Kaminer, P. P. Khargonekar, and M. A. Rotea. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time systems via convex optimization. *Automatica*, 29(1):57–70, 1993.

[20] P. L. D. Peres and J. C. Geromel. $\mathcal{H}_2$ control for discrete-time systems: optimality and robustness. *Automatica*, 29:225–228, 1993.

[21] P. L. D. Peres and J. C. Geromel. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(1):198–202, 1994.

[22] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and A. M. K. Almugla. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems by linear output feedback. In *Proceedings of the 1991 European Control Conference*, pages 2262–2265, Grenoble, France, 1991.

[23] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and J. Bernussou. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded uncertain domains. *Automatica*, 29(2):491–493, 1993.

[24] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. Convex analysis of discrete-time uncertain $\mathcal{H}_\infty$ control problem. In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 521–526, Brighton, UK, 1991.

[25] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ robust control by static output feedback. In *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, volume 1, pages 620–621, San Francisco, USA, 1993.

[26] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. *Systems & Control Letters*, 20:413–418, 1993.

[27] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. $\mathcal{H}_2$ output feedback control for discrete-time systems. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, volume 3, pages 2429–2433, Baltimore, USA, 1994.

[28] P. L. D. Peres, J. C. Geromel, and S. R. Souza. Optimal $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for continuous-time linear systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82:343–359, 1994.

[29] P. L. D. Peres, G. Guaitoli, and C. K. Umezu. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain continuous-time systems with regional pole constraints. In *Proceedings of the IFAC Symposium on Robust Control Design*, volume 1, pages 98–103, Rio de Janeiro, Brazil, 1994.

[30] P. L. D. Peres and S. R. Souza. $\mathcal{H}_\infty$ decentralized output feedback control for discrete-time uncertain systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, volume 4, pages 2926–2930, Seattle, USA, 1995.

[31] P. L. D. Peres and S. R. Souza. Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ decentralized output feedback control for continuous-time uncertain systems. In *Proceedings of the IFAC/IFORS/IMACS Symposium — Large Scale Systems: Theory and Applications*, volume 2, pages 569–574, London, UK, 1995.

[32] P. L. D. Peres, C. K. Umezu, and G. Guaitoli. $\mathcal{H}_2$ Control of Uncertain Discrete-Time Systems with Regional Pole Constraint. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 565–570, Lake Buena Vista, USA, 1994.

[33] A. C. M. Ran and R. Vreugdenhil. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations for continuous and discrete-time systems. *Linear Algebra and Its Applications*, 99:63–83, 1988.

[34] C. Scherer. $\mathcal{H}_\infty$-control by state-feedback and fast algorithms for the computation of optimal $\mathcal{H}_\infty$-norms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1090–1099, 1990.

[35] C. E. De Souza and L. Xie. On the discrete-time bounded real lemma with application in the characterization of static state feedback $\mathcal{H}_\infty$ Controllers. *Systems & Control Letters*, 18:61–71, 1992.

[36] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres. Sliding modes solution for the $\mathcal{H}_2$ singular problem. In *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 243–248, Kobe, Japan, 1996.

[37] I. Yaesh and U. Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems: $\mathcal{H}_\infty$ optimal linear control and filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1264–1271, 1991.

[38] F. J. V. Zuben, S. R. Souza, and P. L. D. Peres. A linear optimization approach to mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control for discrete-time uncertain systems. 1996. submitted.