IA881 – Otimização Linear

Aula: Método Dual Simplex

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2021

Tópicos

O Método Dual Simplex

- Nesta aula apresenta-se o método Dual Simplex, que resolve o problema dual diretamente sobre o *tableau* do método Simplex aplicado ao problema primal. Em resumo, a cada iteração migra-se de uma solução básica factível do problema dual para uma solução factível melhorada até a otimalidade do problema dual ser alcançada (e do primal consequentemente), ou até concluir que o problema dual é ilimitado. Nesse último caso conclui-se que o primal é infactível.

Interpretação da Factibilidade Dual no *Tableau* I

- Considere o PL

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

e o *tableau* apresentado a seguir, sendo **B** uma base (não necessariamente factível).

$$\begin{array}{c|cccc|ccc|c} & x_1 & x_2 & & x_n & \overbrace{x_{n+1} \quad \cdots \quad x_{n+m}}^{\text{Variáveis de Excesso}} & & & \text{LD} \\ \hline z & z_1 - c_1 & z_2 - c_2 & \cdots & z_n - c_n & z_{n+1} - c_{n+1} & \cdots & z_{n+m} - c_{n+m} & \mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}} \\ \hline x_{B_1} & y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} & y_{1,n+1} & \cdots & y_{1,n+m} & \bar{b}_1 \\ x_{B_2} & y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} & y_{2,n+1} & \cdots & y_{2,n+m} & \bar{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{B_m} & y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} & y_{m,n+1} & \cdots & y_{m,n+m} & \bar{b}_m \end{array}$$

Interpretação da Factibilidade Dual no *Tableau* II

O *tableau* representa uma solução primal factível se $\bar{b}_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, isto é, se $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$. Além disso, o *tableau* é ótimo se $z_j - c_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n+m$. Defina $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$. Para $j = 1, \ldots, n$, tem-se que

$$z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j - c_j = \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j - c_j$$

Portanto, $z_j - c_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j - c_j \leq 0$, $j = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$. Além disso, note que $\mathbf{a}_{n+1} = -\mathbf{e}_i$ e $c_{n+i} = 0$, $j = 1, \ldots, m$, o que leva a

$$\begin{aligned} z_{n+i} - c_{n+i} &= \mathbf{w}^T\mathbf{a}_{n+i} - c_{n+i} \\ &= \mathbf{w}^T(-\mathbf{e}_i) - 0 \\ &= -w_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Assim, se $z_{n+i} - c_{n+i} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, então $w_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e, consequentemente $\mathbf{w} \geq 0$. Em resumo, mostrou-se que $z_j - c_j \leq 0$, $i = 1, \ldots, n+m$ implica que $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$ e $\mathbf{w} \geq 0$, com $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$. Em outros termos, a factibilidade dual é precisamente o critério de otimalidade $z_j - c_j \leq 0$ para todo j. No ótimo, $\mathbf{w}^{\star T} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ e o valor do objetivo dual é dado por

Interpretação da Factibilidade Dual no *Tableau* III

$\mathbf{w}^{\star T}\mathbf{b} = (\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}) = \mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}} = z^\star$, isto é os valores ótimos primal e dual são iguais.

Teorema 1

Na otimalidade do problema de minimização primal na forma canônica (isto é, $z_j - c_j \leq 0$ para todo j), $\mathbf{w}^{\star T} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ é uma solução ótima para o problema dual.

O Método Dual Simplex

- Considere o PL

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\,a & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Em certos casos é difícil encontrar uma solução básica inicial factível sem acrescentar as variáveis artificiais. Contudo, pode ser fácil encontrar uma base inicial, não necessariamente factível, mas que é dual factível (isto é, $z_j - c_j \leq 0$ para um problema de minimização). Nesses casos seria interessante desenvolver uma variante do método Simplex capaz de produzir uma sequência de *tableaux* que mantém a factibilidade dual e folgas complementares até chegar na factibilidade primal.

Tableau Dual Factível

- Considere o *tableau*

$$
\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_k & \cdots & x_n & \text{LD} \\
\hline
z & z_1 - c_1 & \cdots & z_j - c_j & \cdots & z_k - c_k & \cdots & z_n - c_n & \mathbf{c}_B^T\bar{\mathbf{b}} \\
\hline
x_{B_1} & y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1k} & \cdots & y_{1n} & \bar{b}_1 \\
x_{B_2} & y_{21} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2k} & \cdots & y_{2n} & \bar{b}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{B_r} & y_{r1} & \cdots & y_{rj} & \cdots & y_{rk} & \cdots & y_{rn} & \bar{b}_r \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_{B_m} & y_{m1} & \cdots & y_{mj} & \cdots & y_{mk} & \cdots & y_{mn} & \bar{b}_m \\
\hline
\end{array}
$$

que representa uma solução básica em alguma iteração. Suponha que o *tableau* é dual factível. Se o *tableau* também é primal factível ($\bar{b}_i \geq 0$), então tem-se uma solução ótima. Caso contrário considere algum $\bar{b}_r < 0$. Selecionando a linha r como linha pivô e uma coluna k tal que $y_{rk} < 0$ como a coluna pivô, é possível tornar o novo lado direito $\bar{b}'_r > 0$. Por meio de uma série de pivotamentos como esse, espera-se tornar todos $\bar{b}_i > 0$ enquanto mantendo $z_j - c_j \leq 0$, e assim atingir a otimalidade.

Como Realizar o Pivotamento

- A questão que se coloca nesse ponto é: como selecionar a coluna pivô de modo a manter a factibilidade dual após o pivotamento? A seguinte regra pode ser adotada para selecionar a coluna de pivotamento k (teste da taxa mínima)

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right\} \tag{1}$$

Note que os novos valores da linha 0 após o pivotamento são dados por

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k - c_k)$$

Se $y_{rj} \geq 0$, então $(z_j - c_j)' \leq z_j - c_j$, pois $z_k - c_k \leq 0$, $y_{rk} < 0$. Uma vez que a solução anterior era dual factível, então $z_j - c_j \leq 0$ e portanto $(z_j - c_j)' \leq 0$. Agora analisa-se o caso $y_{rj} < 0$. Da equação (1), tem-se que

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} \leq \frac{z_j - c_j}{y_{rj}}$$

Multiplicando ambos os lados por $y_{rj} < 0$, fornece $z_j - c_j - (y_{rj}/y_{rk})(z_k - c_k) \leq 0$, isto é, $(z_j - c_j)' \leq 0$.

O Método Dual Simplex

Em resumo, se a coluna pivô é escolhida de acordo com a equação (1), então a factibilidade dual é mantida. Além disso, o objetivo dual após o pivotamento é dado por $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (z_k - c_k)\bar{b}_r/y_{rk}$. Como $z_k - c_k \leq 0$, $\bar{b}_r < 0$ e $y_{rk} < 0$, então $-(z_k - c_k)\bar{b}_r/y_{rk} \geq 0$ e portanto o objetivo dual melhora sobre o valor corrente $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$.

- Para completar a análise é necessário considerar o caso em que $y_{rj} \geq 0$ para todo j, e portanto nenhuma coluna é candidata à coluna pivô. Nesse caso a linha r fornece $\sum_j y_{rj}x_j = \bar{b}_r$. Como $y_{rj} \geq 0$ para todo j, e x_j precisa ser não negativo, então $\sum_j y_{rj}x_j \geq 0$ para qualquer solução factível. Contudo, $\bar{b}_r < 0$. Essa contradição mostra que o primal é infactível, e portanto, o dual é ilimitado.

Algoritmo

Algorithm 1 Algoritmo Dual Simplex

Encontre uma base primal $\mathbf{B}$ tal que $z_j - c_j = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j \leq 0$ para todo j;
enquanto não convergir **faça**
  se $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$ **então**
    a solução atual é ótima, abandone;
  fim se
  Selecione a linha pivô r com $\bar{b}_r < 0$, por exemplo, $\bar{b}_r = \min(\bar{b}_i)$;
  se $y_{rj} \geq 0$ **então**
    o problema dual é ilimitado e o primal é infactível, abandone;
  fim se
  Selecione a coluna pivô k usando

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

  Aplique o pivotamento sobre y_{rk};
fim enquanto

Convergência

- O método Dual Simplex evolui entre bases duais factíveis. Com visto anteriormente, a diferença no valor objetivo dual entre duas iterações consecutivas é $-(z_k - c_k)\bar{b}_r/y_{rk}$. Como $\bar{b}_r < 0$, $y_{rk} < 0$ e $z_k - c_k \leq 0$, então $-(z_k - c_k)\bar{b}_r/y_{rk} \geq 0$. Particularmente se $z_k - c_k < 0$ então o objetivo dual aumenta estritamente, e portanto nenhuma base pode ser repetida e o algoritmo converge em um número finito de passos. Contudo, se $z_k - c_k = 0$, caso que pode acontecer diante de degeneração dual, é necessária uma regra de prevenção de ciclagem para que o algoritmo não entre em *loop* infinito. Por exemplo, pode ser utilizada uma regra lexicográfica, como foi feito para o método Simplex.

Exemplo I

Exemplo

- Resolva o PL dado a seguir pelo método Dual Simplex

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \geq 3 \\
& 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 \geq 4 \\
& x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 3
\end{aligned}
$$

Uma solução inicial dual factível pode ser obtida utilizando as variáveis de excesso x_4 e x_5. Isso é possível devido ao fato do vetor de custos ser não negativo. Aplicando o método Dual Simplex, tem-se a seguinte série de *tableaux*

$$
\begin{array}{r|ccccc|c|}
 & \overset{\downarrow}{x_1} & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
z & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_4 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
\leftarrow x_5 & \text{-2} & 1 & -3 & 0 & 1 & -4 \\
\hline
\end{array}, \quad \mathbf{w}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Exemplo II

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & & \downarrow & & & & \\ & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\ \hline z & 0 & -4 & -1 & 0 & -1 & 4 \\ \hline \leftarrow x_4 & 0 & \text{-5/2} & 1/2 & 1 & -1/2 & -1 \\ x_1 & 1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 2 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{w}^T = [0 \quad 1]$$

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\ \hline z & 0 & 0 & -9/5 & -8/5 & -1/5 & 28/5 \\ \hline x_2 & 0 & 1 & -1/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\ x_1 & 1 & 0 & 7/5 & -1/5 & -2/5 & 11/5 \\ \hline \end{array}, \quad \mathbf{w}^T = [8/5 \quad 1/5]$$

Como $\bar{\mathbf{b}} \geq 0$ e $z_j - c_j \leq 0$ para todo j, tem-se um par ótimo de soluções primal e dual. Em particular

$$[x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star, x_4^\star, x_5^\star]^T = [11/5, 2/5, 0, 0, 0]^T, \quad [w_1^\star, w_2^\star]^T = [8/5, 1/5]^T$$

Técnica da Restrição Artificial

- O método Dual Simplex requer uma solução inicial dual factível. No *tableau* primal, esse requisito se traduz em $z_j - c_j \leq 0$ para todo j (em um problema de minimização). Essas restrições podem ser garantidas por meio de uma técnica conhecida como técnica da restrição artificial.

- Suponha que as primeiras m colunas da matriz $\mathbf{A}$ constituem uma base inicial e considere a inclusão da seguinte restrição adicional

$$\sum_{j=m+1}^{n} x_j \leq M, \qquad \text{com } M \text{ grande o suficiente.}$$

O *tableau* inicial é mostrado a seguir, sendo que x_{n+1} é a variável de folga associada à nova restrição.

Restrição Artificial no Tableau

	x_1	x_2		x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	LD
z	0	0	$\cdots$	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	$\cdots$	$z_n - c_n$	$z_{n+1} - c_{n+1}$	$\mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{b}}$
x_{n+1}	0	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	1	M
x_1	1	0	$\cdots$	0	$y_{1,m+1}$	$\cdots$	$y_{1,n}$	$y_{1,n+1}$	$\bar{b}_1$
x_2	0	1	$\cdots$	0	$y_{2,m+1}$	$\cdots$	$y_{2,n}$	$y_{2,n+1}$	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	0	$\cdots$	1	$y_{m,m+1}$	$\cdots$	$y_{m,n}$	$y_{m,n+1}$	$\bar{b}_m$

- A nova restrição limita as variáveis não básicas, e como consequência as básicas e o problema primal. Para obter uma solução dual factível no novo *tableau*, escolhe-se

$$z_k - c_k = \max_j \{z_j - c_j\}$$

Com k determinado, realiza-se um pivotamento de modo a introduzir a coluna k na base e retirar a coluna $n+1$. Esse pivotamento garante que, ao zerar $z_k - c_k$, todos os outros custos reduzidos tornam-se não positivos, e portanto uma solução dual factível está disponível. O método Dual Simplex pode ser aplicado.

Restrição Artificial no Tableau

- Ao aplicar o método Dual Simplex no problema modificado, uma das três situações listadas a seguir pode acontecer

1. O problema dual é ilimitado;
2. Soluções primal e dual ótimas são obtidas com $x^{\star}_{n+1} > 0$.
3. Soluções primal e dual ótimas são obtidas com $x^{\star}_{n+1} = 0$.

- No caso 1 o problema primal é infactível. No caso 2 as soluções obtidas são ótimas para os problemas primal e dual originais. No caso 3 a restrição adicional está ativa na otimalidade. Se $z_{n+1} - c_{n+1} < 0$, então x_{n+1} é não básica e a restrição extra limita a solução primal. À medida que M aumenta, a função objetivo continua a diminuir indefinidamente, e portanto o problema primal é ilimitado. Entretanto, se $z_{n+1} - c_{n+1} = 0$, então a solução primal corrente é ótima.

Exemplo I

Exemplo

Prepare o *tableau* dado a seguir de modo que o método Dual Simplex possa ser aplicado

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	1	5	-1	0	0
x_1	1	2	-1	1	0	4
x_5	0	3	4	-1	1	3

Adicionando a restrição artificial $x_2 + x_3 + x_4 \leq M$, em que x_6 é a variável de folga, tem-se o *tableau*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	1	5	-1	0	0	0
x_6	0	1	1	1	0	1	M
x_1	1	2	-1	1	0	0	4
x_5	0	3	4	-1	1	0	3

Exemplo II

O maior custo reduzido do *tableau* é 5 e está associado a x_3. Pivotando sobre a linha de x_6 e coluna de x_3, tem-se o *tableau* mostrado a seguir, em que o método Dual Simplex pode ser aplicado.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	-4	0	-6	0	-5	$-5M$
x_6	0	1	1	1	0	1	M
x_1	1	3	0	2	0	1	$M+4$
x_5	0	-1	0	-5	1	-4	$3-4M$