IA881 – Otimização Linear

Aula: Geometria da Programação Linear

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2023

Tópicos

Rank de uma Matriz

- Seja **A** uma matriz de dimensão $m \times n$ (m linhas e n colunas).

Definição 1

O rank de linhas (colunas) de **A** *é igual ao número de linhas (colunas) linearmente independentes de* **A**.

É possível mostrar que o rank de linhas é sempre igual do rank de colunas. Portanto, o rank da matriz **A** é igual ao número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes de **A**. Claramente,

$$rank(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

Se a restrição anterior é atendida na igualdade, então diz-se que **A** tem rank completo.

- Também é possível mostrar que o rank de **A** é r se e somente se **A** pode ser reduzida a (por meio de um número finito de operações matriciais elementares)

$$\begin{bmatrix} I_r & Q \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Exemplo: Determine o rank da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Inicialmente sabemos que $rank(\mathbf{A}) \leq \min\{3,4\} \leq 3$. Aplicando operações elementares chega-se a (no Matlab pode ser usado o comando `rref(A)`)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto $rank(\mathbf{A}) = 2$.

Sistema Linear de Equações - Problema de Decomposição

- Seja $\mathbf{A}$ uma matriz de dimensão $m \times n$ e $\mathbf{x}$ um vetor de dimensão n. Note que o produto $\mathbf{Ax}$ pode ser decomposto na forma

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n$$

- Seja o sistema linear de equações $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Se

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}\right) > \text{rank}(\mathbf{A})$$

então $\mathbf{b}$ não pode ser representado como uma combinação linear das colunas de $\mathbf{A}$. Consequência: não existe solução para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (em particular também para $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$).

Eliminação de Restrições Redundantes

- Suponha que rank($\mathbf{A}$)=rank($\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$) $= k$. A seguinte decomposição sempre é possível

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{b}}\end{bmatrix}$$

sendo que $\bar{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ e $\hat{\mathbf{b}}$ têm as dimensões $k \times n$, $(m-k) \times n$, k e $(m-k)$, respectivamente, e rank($\bar{\mathbf{A}}$)=rank($\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{b}}\end{bmatrix} = k$).

- Note que se $\mathbf{x}$ atende $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}}$, então $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ também é atendido. Portanto, a análise do sistema de equação pode prosseguir desconsiderando as restrições "redundantes" (ou dependentes) $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$.

- Uma vez que rank($\bar{\mathbf{A}}$) $= k$, podemos rearranjar as colunas de $\bar{\mathbf{A}}$ na forma

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{N}\end{bmatrix}$$

sendo que $\mathbf{B}$ (matriz base) é uma matriz não singular de dimensão $k \times k$ (quadrada) e $\mathbf{N}$ é uma matriz qualquer de dimensão $k \times (n-k)$.

Possíveis Soluções

- De modo similar, pode-se obter a decomposição

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{k+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Assim tem-se (levando em conta que $\mathbf{B}$ é invertível)

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \bar{\mathbf{b}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \bar{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{b}} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N \tag{1}$$

- Situações possíveis para o sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$:
  - Se $\text{rank}(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}) > \text{rank}(\mathbf{A})$, então não existe solução.
  - Se $\text{rank}(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = k = n$, então só pode existir uma única solução.
  - Se $\text{rank}(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}) = \text{rank}(\mathbf{A}) = k < n$, então existem infinitas soluções.

- No último caso, as soluções podem ser obtidas arbitrando-se valores para $\mathbf{x}_N$ e calculando $\mathbf{x}_B$ por meio de (1). Se adotarmos $\mathbf{x}_N = 0$, então $\mathbf{x}_B$ é chamada de solução básica de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Exemplo

- Exemplo: Considere o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando o comando `rref()` em

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & 10 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

obtém-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right]$$

Adotando $x_4 = \lambda$, tem-se $x_3 = -2 - \frac{1}{4}\lambda$, $x_2 = 4 + \frac{1}{4}\lambda$ e $x_1 = 4 + \frac{7}{4}\lambda$.

Conjuntos Convexos – Definição

- Um conjunto $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se dados dois pontos $x_1,\ x_2 \in \mathbb{X}$, então

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathbb{X},\ \forall \lambda \in [0,1]. \tag{2}$$

Interpretação geométrica: o segmento de reta que liga x_1 a x_2 também está contido no conjunto.

- Qualquer ponto obtido a partir de (2) para um λ fixo é chamado de combinação convexa de x_1 e x_2. Se $\lambda \in (0,1)$, então a combinação convexa é estrita.

- A Figura 1 mostra alguns exemplos de conjuntos convexos e não convexos.

Exemplos de Conjuntos Convexos

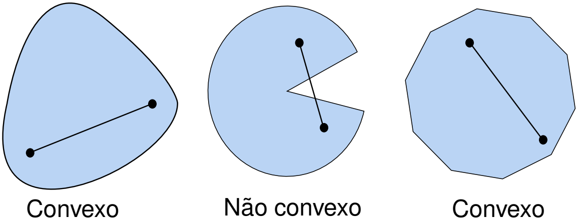

Figura 1: Conjuntos convexos e não convexos.

Outros exemplos de conjuntos convexos:

1. $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
2. $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ sendo que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{b}$ têm dimensões $m \times n$ e m, respectivamente.
3. $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$
4. $$\left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix},\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,\ \lambda_i \geq 0\right\}$$

Ponto Extremo

- O conceito de ponto extremo é importante para a teoria de programação linear.

Ponto Extremo

Um ponto $\mathbf{x}$ em um conjunto convexo $\mathbb{X}$ é chamado ponto extremo de $\mathbb{X}$ se $\mathbf{x}$ não pode ser escrito como uma combinação convexa estrita de dois pontos distintos em $\mathbb{X}$.

Matematicamente, se $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ com $\lambda \in (0,1)$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{X}$, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

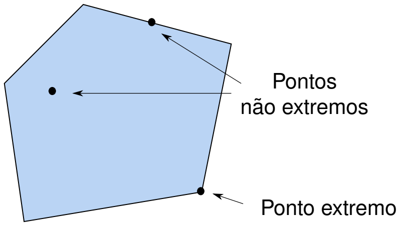

Figura 2: Pontos extremos e não extremos.

Hiperplano – Definição

Hiperplano

Um hiperplano $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto na forma $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T\mathbf{x} = k\}$ sendo que $0 \neq \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ e k é um escalar real. O vetor $\mathbf{p}$ também é chamado de normal ou gradiente do hiperplano.

- No $\mathbb{R}^2$ o conjunto $\{\mathbf{x} : x_1p_1 + x_2p_2 = k\}$ define uma reta e no $\mathbb{R}^3$ o conjunto $\{\mathbf{x} : x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = k\}$ define um plano.

- Equivalentemente, a constante k pode ser eliminada e o hiperplano pode ser representado pela equação $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ para qualquer $\mathbf{x}_0$ pertencente a $\mathbb{H}$.

- Fato: Um hiperplano é um conjunto convexo.

Hiperplano – Ilustração Gráfica

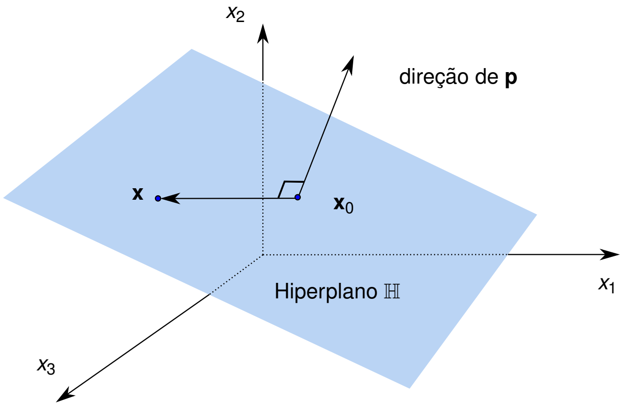

Figura 3: Hiperplano em três dimensões.

Semi-espaço – Definição

- Um hiperplano divide o $\mathbb{R}^n$ em duas regiões, chamadas de semi-espaços.

Semi-espaço

Um semi-espaço é uma coleção de pontos representada por $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T\mathbf{x} \geq k\}$ (ou $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T\mathbf{x} \leq k\}$) sendo $\mathbf{p}$ um vetor não nulo de dimensão n e k um escalar.

- O semi-espaço também pode ser representado por $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 0\}$ ou $\{\mathbf{x} : \mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 0\}$, sendo $\mathbf{x}_0$ um ponto pertencente ao hiperplano que define o semi-espaço.

- Na Figura 3, note que qualquer ponto $\mathbf{x}$ pertencente ao semi-espaço “acima” do hiperplano define um vetor $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ que faz um ângulo agudo $(0 \leq \theta \leq 90^o)$ com o vetor $\mathbf{p}$.

Raio e Direção de Conjuntos

- Um outro exemplo de conjunto convexo é um raio.

Raio

Um raio é uma coleção de pontos representados na forma $\{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$, sendo que $\mathbf{d}$ é um vetor não nulo. $\mathbf{x}_0$ é o *vértice* (ou origem) do raio e $\mathbf{d}$ é a *direção* do raio.

Direção de um Conjunto Convexo

Dado um conjunto convexo, um vetor $\mathbf{d} \neq 0$ é chamado de *direção do conjunto* se, para todo ponto $\mathbf{x}_0$ pertencente ao conjunto, o raio $\{\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{d} : \lambda \geq 0\}$ também pertence ao conjunto.

- Se o conjunto é limitado, claramente o conjunto não possui direções.

Exemplo - Cálculo da Direção

- Considere um conjunto poliedral não vazio $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$. Um vetor não nulo $\mathbf{d}$ é uma direção de $\mathbb{X}$ se, e somente se

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) & \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} & \geq 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{d} \geq 0 \\ \mathbf{Ad} \leq 0 \end{array}$$

- Considere o conjunto

$$\mathbb{X} = \{(x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 \geq 6,\ x_1 - x_2 \geq -2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 1\}$$

$\mathbf{d} = (d_1, d_1)^T$ é uma direção do conjunto se para um ponto genérico $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{X}$, tem-se que $\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{d}$ também pertence ao conjunto. Solução: $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$ e $d_1 \geq 2d_2$.

- A Figura 4 mostra o conjunto $\mathbb{X}$ e a direção $\mathbf{d}$ expressa em termos de uma base de vetores normalizados $\mathbf{d}_a = (1, 0)^T$ e $\mathbf{d}_b = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T$.

Ilustração Gráfica

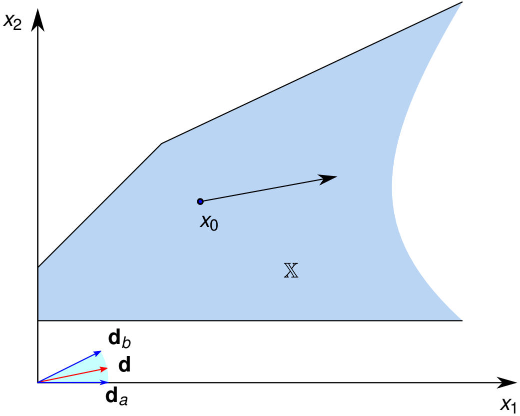

Figura 4: Direções de um conjunto.

Direção Extrema

- Dois vetores $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ são distintos se $\mathbf{d}_1$ não pode se escrito como um múltiplo positivo de $\mathbf{d}_2$.

Direção Extrema

Uma direção extrema de um conjunto é uma direção que não pode ser representada por uma combinação positiva de duas direções distintas do conjunto.

- No exemplo da Figura 4, $\mathbf{d}_a$ e $\mathbf{d}_b$ são duas direções extremas. Qualquer outra direção do conjunto, que não é múltipla de $\mathbf{d}_a$ e $\mathbf{d}_b$, pode ser representada por $\lambda_1 \mathbf{d}_a + \lambda_2 \mathbf{d}_b$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

- Qualquer raio que esteja contido no conjunto convexo e cuja direção coincide com alguma direção extrema é chamado de raio extremo.

Cone Convexo

Cone Convexo

Um cone convexo $\mathbb{C}$ é um conjunto convexo tal que para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$ então $\lambda \mathbf{x} \in \mathbb{C}$ para todo $\lambda \geq 0$.

- Note que todo cone convexo contém a origem (quando $\lambda = 0$) e que para qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$, o raio $\{\lambda \mathbf{x} : \lambda \geq 0\}$ também pertence a $\mathbb{C}$. Portanto, um cone convexo é um conjunto convexo composto inteiramente por raios emanando da origem. Assim o cone convexo pode ser caracterizado completamente por suas direções.

- Como todas as direções não extremas podem ser representadas em termos das direções extremas (combinações positivas), o cone convexo pode ser completamente caracterizado por suas direções extremas.

- A Figura 5 mostra um cone convexo cujas direções extremas são $\mathbf{d}_1 = (1,1)^T$ e $\mathbf{d}_2 = (0,1)^T$. O cone pode ser definido pelo conjunto $\mathbb{C} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_1 \leq x_2\}$

Ilustração – Cone Convexo

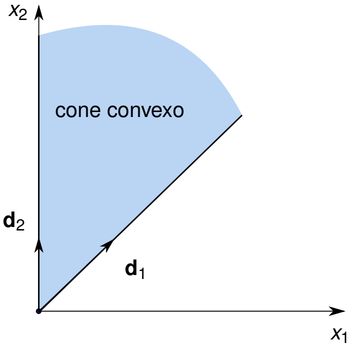

Figura 5: Cone Convexo.

Representação de Cone Convexo

- Um cone convexo pode ser representado alternativamente na forma

$$\mathbb{C} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{a}_j : \lambda_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, k \right\}$$

ou seja, por uma combinação não negativa (ou combinação cônica) de vetores dados $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Na Figura 5 temos $\mathbf{a}_1 = \mathbf{d}_1$ e $\mathbf{a}_2 = \mathbf{d}_2$.

Conjunto Poliedral

- Conjuntos e cones poliedrais $\rightarrow$ casos particulares importantes de conjuntos e cones convexos.

Conjunto poliedral

Um conjunto poliedral (ou poliedro) é a interseção de um número finito de semi-espaços. Um poliedro limitado é chamado de *politopo*.

- Como um semi-espaço pode ser representado por uma desigualdade linear, então um conjunto poliedral pode ser representado pelo sistema de desigualdades $\mathbf{a}^{i}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$, $i = 1, \dots, m$, isto é, pelo conjunto $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$.

- Note que desigualdades podem ser convertidas em igualdades e vice-versa.

- Considere o conjunto de desigualdades: $-2x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_1 \leq 2$, $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. A interseção dos cinco semi-espaços gerados por essas desigualdades é mostrado na Figura 6. Claramente é um conjunto convexo (a interseção de conjuntos convexos resulta em um conjunto convexo). Note que se a desigualdade $-2x_1 + x_2 \leq 4$ for desconsiderada o poliedro continua o mesmo. Esta restrição é dita redundante ou irrelevante para o poliedro.

Ilustração – Conjunto Poliedral

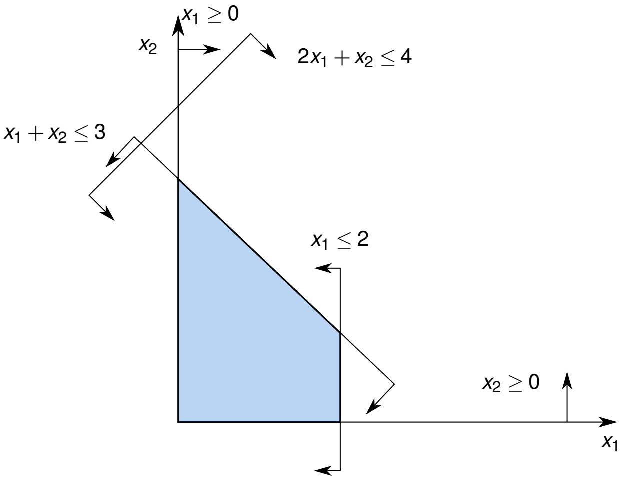

Figura 6: Conjunto poliedral.

Cone Poliedral

- Uma classe especial de conjuntos poliedrais são os cones poliedrais.

Cones Poliedrais

Um cone poliedral é a interseção de um conjunto finito de semi-espaços, cujos hiperplanos passam pela origem. Matematicamente, $\mathbb{C}$ é um cone poliedral se pode ser representado como $\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\}$.

A Figura 5 mostra um exemplo de cone poliedral.

Ponto Extremo em Poliedros

- Seja $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ um conjunto poliedral definido por $(m+n)$ semi-espaços. Os hiperplanos associados aos semi-espaços são referidos como hiperplanos geradores. Note que os hiperplanos geradores são linearmente independentes se a matriz $\mathbf{A}$ tem rank completo de linhas.

Ponto extremo em um poliedro

Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ é considerado um *ponto extremo* (ou *vértice*) de $\mathbb{X}$ se $\mathbf{x}$ está sobre (pertence a) n hiperplanos geradores linearmente independentes.

- Se mais de n hiperplanos geradores passam pelo ponto extremo, então o mesmo é chamado de ponto extremo degenerado. O número de hiperplanos acima de n define a ordem da degeneração.

- Um poliedro com pelo menos um ponto extremo degenerado é chamado de conjunto poliedral degenerado.

Exemplos de Pontos Extremos Degenerados

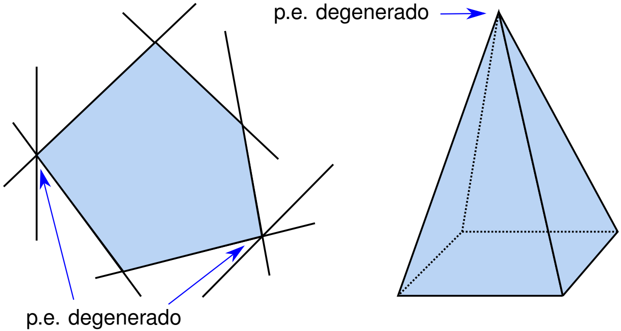

Figura 7: Pontos extremos degenerados.

Cone de recessão

- Foi visto que as direções do conjunto poliedral $\mathbb{X}$ são vetores $\mathbf{d}$ que satisfazem $0 \neq \mathbf{d} \geq 0$ e $\mathbf{Ad} \leq 0$. Essas restrições definem um cone poliedral, também conhecido como um cone de recessão.

- Adicionando a restrição de normalização $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 1$, tem-se

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{d} : \mathbf{Ad} \leq 0,\ \mathbb{1}\mathbf{d} = 1,\ \mathbf{d} \geq 0\}, \quad \mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$$

chamado de conjunto das direções de recessão de $\mathbb{X}$. Assim, as direções extremas de $\mathbb{X}$ são precisamente os pontos extremos de $\mathbb{D}$.

- Exemplo: Considere o conjunto poliedral $\mathbb{X}$ definido por

$$\mathbb{X} = \{(x_1, x_2) : \begin{array}{rcr} -3x_1 + \ \ x_2 & \leq & -2 \\ -x_1 + \ \ x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & \leq & 8 \\ -x_2 & \leq & -2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2 & & \end{array}$$

com ilustração gráfica apresentada na Figura 8.

Exemplo – Conjunto Poliedral

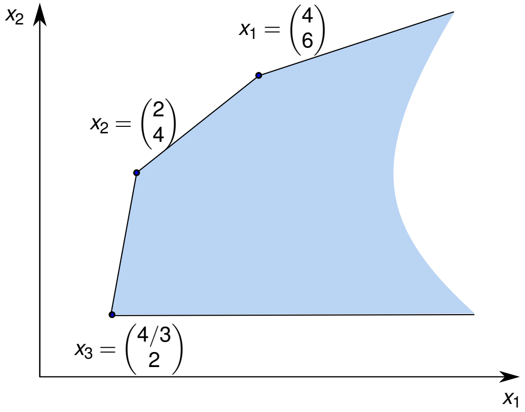

Figura 8: Conjunto $\mathbb{X}$ com pontos extremos $x_1 = (4,6)^T$, $x_1 = (2,4)^T$ e $x_1 = (4/3,2)^T$.

Conjnto $\mathbb{D}$

- O conjunto $\mathbb{D}$ é dado por

$$\mathbb{D} = \{(d_1, d_2) : -3d_1 + d_2 \leq 0,\ -d_1 + d_2 \leq 0,\ -d_1 + 2d_2 \leq 0, \\ -d_2 \leq 0,\ d_1 + d_2 = 1,\ d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0\}$$

e um esboço gráfico é mostrado na Figura 9, contendo dois pontos extremos $\mathbf{d}_1 = (2/3, 1/3)^T$ e $\mathbf{d}_2 = (1, 0)^T$, que são direções extremas de $\mathbb{X}$.

Ilustração Gráfica do Conjunto $\mathbb{D}$

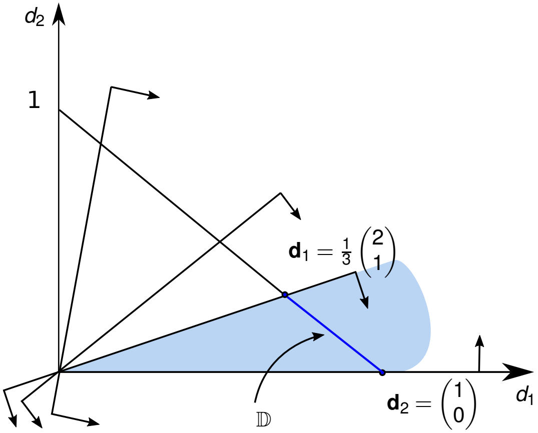

Figura 9: Conjunto $\mathbb{D}$ (em azul) com pontos extremos $\mathbf{d}_1 = (2/3, 1/3)^T$ e $\mathbf{d}_2 = (1, 0)^T$.

Politopos

- Conjuntos poliedrais limitados (politopos): Considere o poliedro $\mathbb{X}$ mostrado na Figura 10, formado pela interseção de 5 subespaços. Note que qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ pode ser escrito como uma combinação convexa (ou média ponderada) dos cinco pontos extremos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_5$.

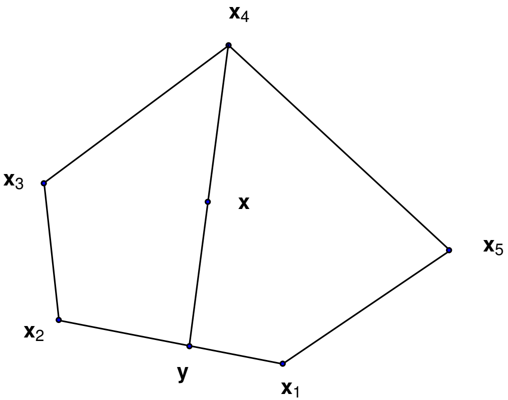

Figura 10: Representação em termos de pontos extremos.

Politopos – Representação

- Note que o ponto $\mathbf{x}$ pode ser representado pela combinação convexa entre $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}_4$, isto é,

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{x}_4, \quad \lambda \in (0,1)$$

Por sua vez, $\mathbf{y}$ também pode ser expresso como uma combinação convexa entre $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$, isto é,

$$\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}_1 + (1-\mu)\mathbf{x}_2, \quad \mu \in (0,1)$$

Juntando as equações, tem-se

$$\mathbf{x} = \lambda\mu\mathbf{x}_1 + \lambda(1-\mu)\mathbf{x}_2 + (1-\lambda)\mathbf{x}_4$$

Note que todos os coeficientes pertencem ao intervalo $(0,1)$ e somam um.

Poliedros Ilimitados

■ Conjuntos poliedrais ilimitados : Considere o poliedro $\mathbb{X}$ mostrado na Figura 11, que possui três pontos extremos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$, e duas direções extremas $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$. De modo geral, qualquer ponto do conjunto pode ser representado *como uma combinação convexa do pontos extremos mais uma combinação linear não negativa das direções extremas*.

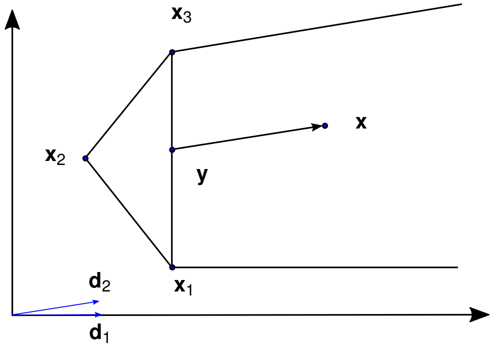

Figura 11: Representação em termos de pontos extremos e direções extremas (poliedro ilimitado).

Exemplo de Poliedro Ilimitado

- Como exemplo, note que o ponto $\mathbf{x}$ pode ser representado em função de $\mathbf{y}$ mais um múltiplo positivo da direção extrema $\mathbf{d}_2$ (a direção $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ coincide com $\mathbf{d}_2$). Por sua vez, $\mathbf{y}$ pode ser representado em termos da combinação convexa entre $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_3$. Assim, tem-se

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mu\mathbf{d}_2 \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_3 + \mu\mathbf{d}_2,\ \lambda \in (0,1),\ \mu > 0$$

Teorema da Representação

Teorema 1 (Teorema da Representação)

Seja $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *um conjunto poliedral não vazio. As seguintes propriedades são verdadeiras:*

(a) *O conjunto de pontos extremos é não vazio e contém um número finito de elementos, por exemplo,* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_k$.

(b) *Se o conjunto é limitado, então o conjunto de direções extremas é vazio. Por outro lado, se for ilimitado, o conjunto de direções extremas é não vazio e tem um número finito de elementos, por exemplo,* $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, ..., $\mathbf{d}_\ell$.

(c) *Um ponto* $\bar{\mathbf{x}}$ *pertence a* $\mathbb{X}$ *se, e somente se, ele pode ser representado como uma combinação convexa de* $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_k$ *mais uma combinação linear não negativa de* $\mathbf{d}_1$, ..., $\mathbf{d}_\ell$, *isto é,*

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \mathbf{d}_i$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0,\ \mu_i \geq 0,\ j = 1, \ldots, k,\ i = 1, \ldots, \ell$$

Comentários

- A prova do item (b) é imediata a partir das definições de direções extremas e direções de recessão (conjunto $\mathbb{D}$).

- Para provar o item (a) (sempre existirá pelo menos um ponto extremo), mostra-se que qualquer ponto $\bar{\mathbf{x}}$ do conjunto $\mathbb{X}$ é escrito em função de no mínimo um ponto extremo, portanto $k \geq 1$. Sistemática: escolha um ponto arbitrário $\bar{\mathbf{x}}$ em $\mathbb{X}$ e trace uma reta que passa por ele com direção arbitrária. Essa reta sempre interseccionará com um dos hiperplanos que definem $\mathbb{X}$, digamos em um ponto $\mathbf{y}$. Se esse ponto não for um ponto extremo, repete-se o procedimento para o ponto $\mathbf{y}$, até chegar em um ponto extremo.

- Para provar (c), utiliza-se o artifício de criar um conjunto auxiliar $\bar{\mathbb{X}}$ de acordo com

$$\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cap \{\mathbf{x} : \mathbb{1}\mathbf{x} \leq M\}$$

com M grande o suficiente de tal forma que $\mathbb{1}\mathbf{x}_j < M$ para $j = 1, \ldots, k$ e $\mathbb{1}\bar{\mathbf{x}} < M$. O conjunto $\bar{\mathbb{X}}$ é limitado e contém os mesmos pontos extremos de $\mathbb{X}$ (mais alguns).

Exemplo

- Exemplo: Considere o conjunto $\mathbb{X}$ mostrado na Figura 8. O objetivo é representar o ponto $\bar{\mathbf{x}} = (4,3)^T$, conforme mostra a Figura 12.

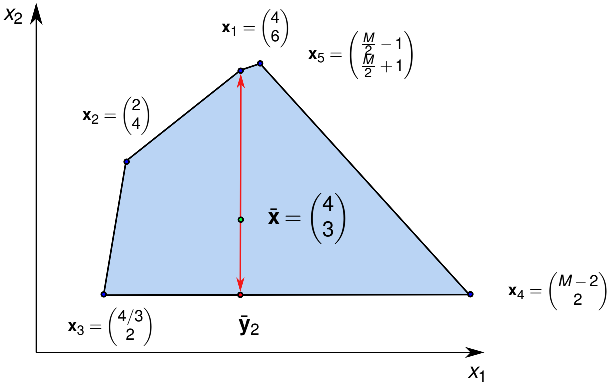

Figura 12: Representação em termos de pontos extremos e direções extremas (poliedro ilimitado).

Determinação dos λ_i

- Convenientemente, escolhemos $\mathbf{d} = (0,1)^T$. Determinando $\bar{\lambda}_1 = \max\{\lambda : (4,3) + \lambda(0,1) \in \bar{\mathbb{X}}\} = 3$, levando $\bar{\mathbf{y}}_1 = (4,6)^T = \mathbf{x}_1$. Na sequência determina-se $\bar{\lambda}_1 = \max\{\lambda : (4,3) + \lambda(0,-3) \in \bar{\mathbb{X}}\} = 1/3$, levando a $\bar{\mathbf{y}}_2 = (4,2)^T$. Assim tem-se

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 + \frac{3}{4}\bar{\mathbf{y}}_2$$

- O processo é repetido em $\bar{\mathbf{y}}_2$. Tomando a direção $\mathbf{d} = (1,0)^T$, determina-se o valor de λ resolvendo

$$(4,2)^T = \lambda(\frac{4}{3},2)^T + (1-\lambda)(M-2,2)^T$$

que leva a $\lambda = (M-6)/(M-10/3)$. Assim,

$$\bar{\mathbf{y}}_2 = \frac{M-6}{M-10/3}\mathbf{x}_3 + \frac{8/3}{M-10/3}\mathbf{x}_4$$

Substituindo na expressão de $\bar{\mathbf{x}}$, tem-se

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 + \frac{3(M-6)}{4(M-10/3)}\mathbf{x}_3 + \frac{2}{M-10/3}\mathbf{x}_4$$

Determinação dos λ_i – Continuação

- Finalmente, o ponto extremo (artificial) $\mathbf{x}_4$ pode se escrito em função do ponto extremo $\mathbf{x}_3$ e de uma direção $\mathbf{d}_1$, na forma

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3 + \theta\mathbf{d}, \quad \mathbf{d}_1 = (1,0)^T, \theta = 1(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3) = (M - 10/3)$$

levando a

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{4}\mathbf{x}_1 + \frac{3}{4}\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{d}_1 = (1,0)^T$$

- Importante: A representação de $\bar{\mathbf{x}}$ não é única. Por exemplo, $\bar{\mathbf{x}}$ também pode ser representado na forma

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{x}_3 + \frac{7}{3}\mathbf{d}_1, \quad \mathbf{d}_1 = (1,0)^T$$