IA881 – Otimização Linear

Aula: Inicialização do Método Simplex

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2023

Tópicos

Solução Básica Factível Inicial

- Para iniciar o método Simplex, é necessário ter uma solução básica factível inicial. Em termos práticos, é necessária uma matriz $\mathbf{B}$ tal que $\bar{b} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$.

- Considere o caso em que as restrições estão na forma $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$. Introduzindo variáveis de folga $\mathbf{x}_F$, tem-se $\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_F = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{x}_F \geq 0$. Solução básica factível imediata: $\mathbf{x}_B = \mathbf{x}_F$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}$, com $\mathbf{B} = I$, $\mathbf{N} = A$, $\mathbf{x}_F = b$ e $\mathbf{x} = 0$. Aplica-se o método Simplex.

- Nem sempre a inicialização anterior é possível. Por exemplo, quando $\mathbf{b}$ não é não negativo (componentes negativas podem existir). Outra possibilidade $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$ com $\mathbf{b} \nleq 0$.

Técnica: Variáveis Artificiais

- Estratégia de solução: utilizar variáveis artificiais.

- Suponha que o problema em mãos está na forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{b} \geq 0$ (sempre é possível colocar nessa forma). Considere as restrições modificadas

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \geq 0, \ \mathbf{x}_a \geq 0$$

sendo $\mathbf{x}_a$ um vetor com variáveis artificiais. Uma solução básica factível inicial imediata é: $\mathbf{x}_a = b$, $\mathbf{x} = 0$.

- O problema foi modificado, mas caso o método Simplex seja aplicado e o valor final das variáveis artificiais seja $\mathbf{x}_a = 0$, então a solução encontrada também é ótima para o problema original.

- Não confundir variáveis de folga (ou de excesso) com variáveis artificiais.

Exemplo – Continuação

Exemplo

Encontre uma solução básica factível para o conjunto de restrições

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ -3x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{aligned}$$

- Introduzindo variáveis de folga e de excesso, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}- x_4 + x_5} &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \phantom{{}- x_3} - x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 5 \\ 2x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3 - x_4} + x_5 &= 6 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,5 \end{aligned}$$

Não existe nenhuma submatriz “identidade” nessa representação.

Exemplo – Continuação

- Introduzindo duas variáveis artificiais, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad\quad + x_6 \quad\quad &= 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \quad - x_4 \quad\quad\quad + x_7 &= 5 \\ 2x_1 + \ x_2 \quad\quad + x_5 \quad\quad\quad &= 6 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7 & \end{aligned}$$

Uma solução básica factível inicial imediata é $\mathbf{x}_B = \{x_5, x_6, x_7\}$.

- Ao aplicar o método Simplex, deseja-se que x_6 e x_7 sejam zeradas.

Método das Duas Fases

- O método das duas fases consiste em, uma primeira fase, reduzir a zero o valor de todas as variáveis artificiais ou concluir que o problema original é infactível. Se as variáveis artificiais foram zeradas, então a segunda fase do método otimiza a função objetivo original do problema começando com a solução básica factível obtida no final da primeira fase.

Técnica

Método das Duas Fases

Fase 1:
Resolva o PL a seguir começando com a solução básica factível $\mathbf{x}_a = \mathbf{b}$ e $\mathbf{x} = 0$

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{x}_0 = \mathbb{1}^T \mathbf{x}_a \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x}_a \geq 0 \end{array}$$

Se no ótimo $\mathbf{x}_a \neq 0$, então o problema original é infactível. Caso contrário vá para a fase II, tomando as variáveis básicas e não básicas como as variáveis originais do problema.

Fase 2:
Resolva o PL a seguir começando com a solução básica factível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ e $\mathbf{x}_N = 0$

$$\begin{array}{ll} \min & z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N \\ s.\ a & \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B \geq 0,\ \mathbf{x}_N \geq 0 \end{array}$$

Exemplo

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir utilizando o método das duas fases.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2 \end{aligned}$$

Introduzindo variáveis de folga e de excesso, e variáveis artificiais, tem-se

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 + x_7 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7 \end{aligned}$$

Uma base pode ser imediatamente identificada a partir de x_5, x_6 e x_7 (poderia-se criar uma variável artificial x_8, mas x_5 pode ser utilizada).

Exemplo – Continuação

- Levando em conta que a função objetivo da fase 1 é $x_6 + x_7$, o seguinte *tableau*, que ainda não está na forma canônica, pode ser construído

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	0	0	-1	-1	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Por meio de pivotamentos, transforma-se $z_6 - c_6 = z_7 - c_7 = 0$ e o *tableau* fica na forma canônica, como mostra o *tableau* da primeira iteração. Na sequência apresenta-se os *tableaus* produzidos até a solução ótima pelo método Simplex.

Fase 1 – Iteração 1

	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	2	-1	-1	0	0	0	3
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
$\leftarrow x_7$	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Exemplo – Continuação

Fase 1 – Iteração 2

	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	2	0	-1	1	0	0	-2	1
$\leftarrow x_6$	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2

Fase 1 – Iteração 3 - Terminada a primeira fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$

Uma solução básica factível para inicializar a fase 2 é dada por $[x_1,\ x_2,\ x_5]$ e vale $[1/2, 3/2, 3/2]^T$. As variáveis artificiais podem ser removidas do problema e o vetor de custos **c** original é resgatado, levando ao *tableau* (não canônico)

Exemplo – Continuação

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	-1	2	0	0	0	
x_1	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$3/2$
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$3/2$

- Reconstruindo o *tableau* na forma canônica, isto é, tornando $z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = 0$, tem-se o *tableau* mostrado na iteração 1. A sequência de *tableaus* até a convergência é mostrada em seguida.

Fase 2 – Iteração 1

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	LD
z	0	0	$1/2$	$3/2$	0	$-5/2$
$\leftarrow x_1$	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$3/2$
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$3/2$

Exemplo – Continuação

Fase 2 – Iteração 2

	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	LD
z	-3	0	2	0	0	-4
x_4	2	0	-1	1	0	1
x_2	1	1	-1	0	0	2
$\leftarrow x_5$	-1	0	1	0	1	1

Fase 2– Iteração 3 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	-1	0	0	0	-2	-6
x_4	1	0	0	1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	3
x_3	-1	0	1	0	1	1

O problema original tem solução ótima dada por $z^\star = -6$ cujo ponto extremo associado é $\mathbf{x}^\star = [0, 3, 1, 2, 0]^T$. A Figura 1 mostra a região factível no plano $x_1 \times x_2$ e a sequência de pontos gerada pelas fases 1 e 2.

Exemplo – Continuação

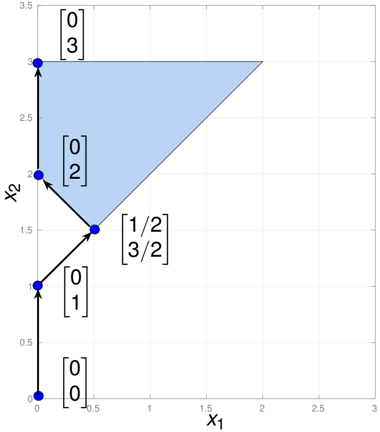

Figura 1: Região factível e caminho Simplex do método das duas fases no plano $x_1 \times x_2$.

Variáveis artificiais Não Foram Zeradas

- Na final da fase 1, as variáveis artificiais $\mathbf{x}_a$ podem ter sido zeradas ou não. Os dois casos são analisados na sequência.

- **Caso A: $\mathbf{x}_a \neq 0$**: se $\mathbf{x}_a \neq 0$ o problema original não é factível, pois se existe um $\mathbf{x} \geq 0$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, então $[\mathbf{x}^T, 0]^T$ é uma solução factível da fase 1 e

$$0(\mathbf{x}) + \mathbb{1}^T 0 = 0 < \mathbb{1}^T \mathbf{x}_a$$

contradizendo a otimalidade de $\mathbf{x}_a$.

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir pelo método das duas fases

$$\begin{array}{ll} \min & z = -3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 18 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1,2 \end{array}$$

Exemplo

- Para colocar as restrições na forma padrão, introduz-se uma variável de folga, uma de excesso e uma artificial,

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad\qquad &= \ \ 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 + x_5 &= 18 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 & \end{aligned}$$

Transportando os dados para o *tableau*, tem-se

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	0	0	0	-1	
x_3	1	1	1	0	0	4
x_5	2	3	0	-1	1	18

Com uma operação de pivotamento, coloca-se o *tableau* na forma canônica (próximo *tableau*) e prossegue-se com o método Simplex até a otimalidade.

Exemplo – Continuação

Fase 1 – Iteração 1

	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	LD
z	2	3	0	-1	0	18
← x_3	1	1	1	0	0	4
x_5	2	3	0	-1	1	18

Fase 1 – Iteração 2 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	-1	0	-3	-1	0	6
x_2	1	1	1	0	0	4
x_5	-1	0	-3	-1	1	6

Como a variável artificial $x_5 > 0$, conclui-se que o problema original é infactível.

Variáveis artificiais Foram Zeradas

- **Caso B.1: $\mathbf{x}_a = 0$ e todas variáveis artificiais estão fora da base**: No final da fase 1 tem-se o seguinte *tableau*, no qual as variáveis $\mathbf{x}_a$ estão fora da base

	x_0	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$\mathbf{x}_a$	LD
x_0	1	0	0	$-\mathbb{1}^T$	0
$\mathbf{x}_B$	0	I_m	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

Nesse ponto a fase 2 pode ser iniciada, descartando as colunas referentes ao vetor $\mathbf{x}_a$. Os valores $(z_j - c_j)$ das variáveis não básicas são dados pelo vetor $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N$ (note que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$ está no *tableau* do final da fase 1)

- **Caso B.2: $\mathbf{x}_a = 0$ e algumas variáveis artificiais estão base**: Nesse caso é possível ir direto para a fase 2, ou eliminar as variáveis artificiais da base antes. As duas situações são discutidas na sequência.

- **(a) Conservar variáveis artificiais nulas na fase 2**: Elimina-se as variáveis artificiais não básicas e constrói-se o *tableau* com as variáveis originais e algumas artificiais (na base e nulas). Os coeficientes $z_j - c_j$ são construídos normalmente. Os coeficientes de custo das variáveis artificiais devem ser zero. Ao executar o método Simplex na fase 2, é importante deixar as variáveis artificiais sempre com valores nulos (caso contrário perde-se factibilidade).

Variáveis artificiais Nulas Na Base

- Considere o *tableau* mostrado a seguir, em que $x_{n+k+1}, \ldots, x_{n+m}$ são variáveis artificiais que ficaram na base após o término da fase 1. Se $y_{ij} \geq 0$, $i = k+1, \ldots, m$, nenhuma atenção especial é requerida e o teste da taxa mínima pode ser aplicado. Contudo, se pelo menos um $y_{rj} < 0$, $r \in \{k+1, \ldots, m\}$, a variável artificial x_{n+r} vai se tornar positiva, o que deve ser evitado. Nesse caso abandona-se o teste da taxa mínima e pivota-se sobre o próprio y_{rj}, e x_{n+r} deixa a base.

	z	x_1	$\cdots$	x_k	$x_{k+1} \cdots x_j \cdots x_n$	x_{n+k+1}	$\cdots$	x_{n+m}	LD
z	1	0	$\cdots$	0	$z_j - c_j$	0	$\cdots$	0	$\mathbf{c}_B^T \bar{\mathbf{b}}$
x_1	0	1			y_{1j}	0	$\cdots$	0	$\bar{b}_1$
x_2	0	0	1		y_{2j}	0	$\cdots$	0	$\bar{b}_2$
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_k	0			1	y_{kj}	0	$\cdots$	0	$\bar{b}_k$
x_{n+k+1}	0	0	$\cdots$	0	$y_{k+1,j}$	1			0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$
x_{n+r}	0	0	$\cdots$	0	y_{rj}		1		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		$\vdots$
x_{n+m}	0	0	$\cdots$	0	y_{mj}			1	0

Comentários Finais

- Sempre que uma variável artificial sai da base, a sua coluna corresponde no *tableau* pode ser removida.

- Com essas modificações, o método Simplex pode ser utilizado para resolver a fase 2.

- **(a) Eliminar todas as variáveis artificiais antes de ir para a fase 2**: É possível eliminar todas as variáveis artificiais antes de ir para a fase 2, basicamente substituindo as variáveis artificiais básicas por variáveis originais que estão fora da base. Detalhes sobre esse procedimento podem ser encontrados em [BJS10, Seção 4.2].

Exemplo

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir utilizando o método das duas fases.

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s. a} \quad & \begin{array}{rcl} x_1 + \ x_2 + \ x_3 & = & 6 \\ -x_1 + \ x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 2x_2 + 3x_3 & = & 10 \\ x_3 & \leq & 2 \end{array} \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,3
\end{aligned}$$

Introduzindo uma variável de folga na quarta restrição, tem-se $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Note que a matriz **A** não tem rank completo, pois a terceira linha é redundante (soma das linhas um e dois).

Exemplo – Continuação

- Esse tipo de redundância pode ser detectada pela Fase 1 do método Simplex, como será visto na sequência. Introduzindo três variáveis artificiais x_5, x_6 e x_7 e tomando a soma das mesmas como função objetivo, tem-se o *tableau* (ainda não canônico)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	0	-1	-1	-1	
x_5	1	1	1	0	1	0	0	6
x_6	-1	1	2	0	0	1	0	4
x_7	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	1	1	0	0	0	2

Após aplicar pivotamentos para garantir $z_j - c_j = 0$, $j = 5, 6, 7$, inicia-se o método Simplex. A sequência de *tableaus* até a convergência é apresentada a seguir.

Fase 1 – Iteração 1

	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	4	6	0	0	0	0	20
x_5	1	1	1	0	1	0	0	6
$\leftarrow x_6$	-1	1	2	0	0	1	0	4
x_7	0	2	3	0	0	0	1	10
x_4	0	0	1	1	0	0	0	2

Exemplo – Continuação

Fase 1 – Iteração 2

	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	3	1	0	0	0	-3	0	8
x_5	$3/2$	$1/2$	0	0	1	$-1/2$	0	4
x_3	$-1/2$	$1/2$	1	0	0	$1/2$	0	2
x_7	$3/2$	$1/2$	0	0	0	$-3/2$	1	4
$\leftarrow x_4$	$1/2$	$-1/2$	0	1	0	$-1/2$	0	0

Fase 1 – Iteração 3

	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	4	0	-6	0	0	0	8
$\leftarrow x_5$	0	2	0	-3	1	1	0	4
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
x_7	0	2	0	-3	0	0	1	4
x_1	1	-1	0	2	0	-1	0	0

Exemplo – Continuação

Fase 1 – Iteração 4 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	0	-2	-2	0	0
x_2	0	1	0	$-3/2$	$1/2$	$1/2$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_1	1	0	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	0	2

Note que variável artificial x_7 permaneceu na base com valor nulo. Além disso, na linha associada a x_7 temos coeficientes nulos associados a todas as variáveis originais (não artificiais). Na ausência das variáveis artificiais, como originalmente, essa linha nos informa que $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$, revelando a existência de uma restrição redundante no problema original (como notado inicialmente).

- É possível eliminar a linha 3 e as três variáveis artificiais e então ir para a fase 2. Alternativamente, a fase 2 pode ser inicializada conservando x_7 na base, eliminando apenas as variáveis x_5 e x_6. Nesse caso as adaptações comentadas anteriormente precisam consideradas.

Exemplo – Continuação

- Preparando o *tableau* para a Fase 2, tem-se

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	-2	3	0	0	
x_2	0	1	0	$-3/2$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	2
x_5	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	$1/2$	0	2

Aplicando os pivotamentos necessários, chega-se no *tableau* dado a seguir, que é ótimo.

Fase 2 – Iteração 1 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	0	0	$-13/2$	0	-4
x_2	0	1	0	$-3/2$	0	2
x_3	0	0	1	1	0	2
x_5	0	0	0	0	1	0
x_1	1	0	0	$1/2$	0	2

Método do Big-M

- A função da fase 1 no método das duas fases é justamente eliminar as variáveis artificiais que foram introduzidas para produzir uma solução básica inicial factível de forma imediata. Uma outra alternativa é o método do Big-M, que penalizará as variáveis artificiais na função objetivo por meio de um coeficiente de custo grande M. Desse modo o método Simplex naturalmente tornará a presença das variáveis artificias na base algo indesejável.

- O método do Big-M consiste em resolver o seguinte PL modificado:

$$\begin{array}{ll} \min & z_{big-M} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + M\mathbb{1}^T\mathbf{x}_a \\ s.\ a & \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_a = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x}_a \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

sendo M um número suficientemente grande. $M\mathbb{1}^T\mathbf{x}_a$ pode ser visto como um termo que penaliza qualquer solução com $\mathbf{x}_a \neq 0$. Dessa forma, o método Simplex vai inicialmente tentar remover as variáveis artificiais da base e continuar até encontrar uma solução ótima para o problema original, se alguma existir.

Exemplo

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir utilizando o método do Big-M.

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & z = x_1 - 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_2 \leq 3 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2
\end{aligned}
$$

Esse exemplo foi resolvido anteriormente pelo método das duas fases. Aplicando os mesmos procedimentos de preparação e considerando a função objetivo do método Big-M, tem-se o *tableau*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	-1	2	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_7	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Exemplo – Continuação

- Colocando o *tableau* na forma canônica e prosseguindo-se com o método Simplex, tem-se a seguinte sequência de *tableaus* até a convergência:

Iteração 1

	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	-1	$2+2M$	$-M$	$-M$	0	0	0	$3M$
x_6	1	1	-1	0	0	1	0	2
$\leftarrow x_7$	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	0	0	3

Iteração 2

	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	$1+2M$	0	$-M$	$2+M$	0	0	$-2-2M$	$-2+M$
$\leftarrow x_6$	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	1	1	0	-1	2

Exemplo – Continuação

Iteração 3

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	0	0	$1/2$	$3/2$	0	$-1/2-M$	$-3/2-M$	$-5/2$
$\leftarrow x_1$	1	0	$-1/2$	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$1/2$
x_2	0	1	$-1/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	$3/2$
x_5	0	0	$1/2$	$1/2$	1	$-1/2$	$-1/2$	$3/2$

Iteração 4

	x_1	x_2	$\downarrow$ x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	-3	0	2	0	0	$-2-M$	$-M$	-4
x_4	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	1	1	-1	0	0	1	0	2
$\leftarrow x_5$	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Exemplo – Continuação

Iteração 5 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z_{big-M}	-1	0	0	0	-2	$-M$	$-M$	-6
x_4	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	1	0	0	1	0	0	3
x_3	-1	0	1	0	1	-1	0	1

Análise do Método do Big-M I

- Observando a função objetivo do problema Big-M

$$z_{big-M} = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + M\mathbb{1}^T \mathbf{x}_a$$

percebe-se que a mesma nada mais é do que a soma da função objetivo original $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ (utilizada pela fase 2 do método das duas fases) com a função objetivo da fase 1 multiplicada por M, isto é, $Mx_0 = M\mathbb{1}^T \mathbf{x}_a$.

- Portanto, uma análise similar ao método das duas fases pode ser realizada. Enquanto os coeficientes de M na lista do custo não são todos não positivos (≤ 0), a fase 1 ainda não terminou e prossegue-se com o procedimento de colocar uma nova variável na base e assim por diante. No momento que todos os coeficientes de M na linha do custo são não positivos, a fase 1 é terminada e inspeciona-se os valores das variáveis artificiais. Duas situações podem acontecer:

- **Caso A – todas as variáveis artificiais são nulas**: Tem-se uma solução básica factível para o problema original (certamente factível). As variáveis artificiais podem ser eliminadas (os procedimentos discutidos no método das duas fases também podem ser aplicados) e aplica-se o método Simplex no problema original até a otimalidade ou detecção de solução ilimitada.

Análise do Método do Big-M II

- **Caso B – alguma variável artificial não é nula**: Conclui-se que o problema original é infactível e encerra-se o procedimento.

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir utilizando o método do Big-M

$$\begin{array}{ll} \min & z = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ \text{s. a} & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & -x_1 \qquad + \; x_3 \geq 4 \\ & \qquad\qquad x_3 \geq 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

Para colocar as restrições na forma padrão e ter uma base inicial factível, introduz-se uma variável de folga (x_4), duas de excesso (x_5 e x_6) e duas artificiais (x_7 e x_8), levando ao *tableau* (não canônico) dado a seguir.

Exemplo

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z_{Big-M}	1	3	-1	0	0	0	$-M$	$-M$	
x_4	1	1	2	1	0	0	0	0	4
x_7	-1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_8	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

$\downarrow$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z_{Big-M}	$1-M$	3	$-1+2M$	0	$-M$	$-M$	0	0	$7M$
$\leftarrow x_4$	1	1	2	1	0	0	0	0	4
x_7	-1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_8	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

Exemplo – Continuação

Iteração 2 - Todos os coeficientes de M são não positivos.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	LD
z_{Big-M}	$3/2-2M$	$7/2-M$	0	$1/2-M$	$-M$	$-M$	0	0	$2+3M$
x_3	$1/2$	$1/2$	1	$1/2$	0	0	0	0	2
x_7	$-3/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1	0	2
x_8	$-1/2$	$-1/2$	0	$-1/2$	0	-1	0	1	1

Neste momento temos um *tableau* ótimo, pois todos os custos reduzidos são negativos ou nulos. Inspeciona-se as variáveis artificiais e percebe-se que duas estão na base com valores não nulos. Conclui-se que o problema original é infactível.

Exemplo

Exemplo

Resolva o PL dado a seguir utilizando o método do Big-M.

$$\begin{array}{ll} \min & z = -x_1 - x_2 \\ \text{s. a} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2 \end{array}$$

Introduzindo variáveis de excesso e artificiais, tem-se o *tableau*

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z_{Big-M}	1	1	0	0	$-M$	$-M$	
x_5	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	-1	1	0	-1	0	1	1

Aplicando pivotamentos para deixar o quadro na forma canônica e prosseguindo-se com o método Simplex, tem-se a o *tableau* dado a seguir.

Exemplo – Continuação

Iteração 1 - Problema Infactível!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z_{Big-M}	1	1	$-M$	$-M$	0	0	$2M$
x_5	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	-1	1	0	-1	0	1	1

Embora o *tableau* não seja ótimo (existem candidatos para entrar na base), todos os coeficientes de M na linha z_{Big-M} são negativos (indicando o final da Fase 1) e as variáveis artificiais permanecem na base. Nesse momento declara-se a infactibilidade do problema original.

Quão grande M deve ser?

- Considere que o problema original é factível. Claramente, M deve ser grande o suficiente de tal forma que uma solução básica factível para o problema Big-M (1) com $\mathbf{x}_a = 0$ seja estritamente melhor (menor) do que a melhor solução básica factível em que pelo menos uma variável artificial é não nula. Sempre existe um valor finito para M que garante essa situação. Em geral M pode ser ajustado apenas observando os coeficientes da função objetivo (em módulo) e escolhendo algumas ordens de magnitude acima. Caso a soma das variáveis artificiais, para uma solução básica factível, seja um número muito pequeno, um ajuste mais criterioso de M pode ser necessário. Ver [BJS10, Página 173] para um exemplo concreto.

- Valores muito grandes para M também podem ser um problema em função de erros de arredondamento e truncamento. O método das duas fases não sofre desse problema e é mais robusto numericamente.

Ciclagem

- Como visto anteriormente, na ausência de degeneração, o método Simplex termina com uma solução ótima ou afirmando que o problema tem solução ilimitada. Contudo, diante de degeneração, o método Simplex pode alternar entre diferentes bases e continuar no mesmo ponto extremo. Por exemplo, o método pode alternar entre as bases $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, ..., $\mathbf{B}_t$, sendo $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_1$. Se a mesma sequência de pivôs é usada novamente, entra-se em um ciclo infinito nesse conjunto de bases. É possível que esse ciclo aconteça no ponto extremo ótimo, e sua otimalidade não será reconhecida. Na sequência é apresentada uma regra para evitar esse fenômeno conhecido como ciclagem.

Exemplo

Resolva o PL

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = -(3/4)x_4 + 20x_5 - (1/2)x_6 + 6x_7 \\
\text{s. a} & x_1 + (1/4)x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + (1/2)x_4 - 12x_5 - (1/2)x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 7
\end{array}
$$

Exemplo

- O método Simplex é aplicado, considerando a variável não básica com maior custo reduzido $z_j - c_j$ como candidata a entrar na base, e o teste de taxa mínima para remover uma variável da base, com escolha arbitrária diante de empates.

Iteração 1

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	$3/4$	-20	$1/2$	-6	0
$\leftarrow x_1$	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

Iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	x_6	x_7	LD
z	-3	0	0	0	4	$7/2$	-33	0
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
$\leftarrow x_2$	-2	1	0	0	4	$3/2$	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

Exemplo – Continuação

Iteração 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow x_6$	x_7	LD
z	-1	-1	0	0	0	2	-18	0
$\leftarrow x_4$	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	$-1/2$	$1/4$	0	0	1	$3/8$	$-15/4$	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

Iteração 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	2	-3	0	$-1/4$	0	0	3	0
x_6	$-3/2$	1	0	$1/8$	0	1	$-21/2$	0
$\leftarrow x_5$	$1/16$	$-1/8$	0	$-3/64$	1	0	$3/16$	0
x_3	$3/2$	-1	1	$-1/8$	0	0	$21/2$	1

Exemplo – Continuação

Iteração 5

	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	1	-1	0	$1/2$	-16	0	0	0
← x_6	2	-6	0	$-5/2$	56	1	0	0
x_7	$1/3$	$-2/3$	0	$-1/4$	$16/3$	0	1	0
x_3	-2	6	1	$5/2$	-56	0	0	1

Iteração 6

	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	2	0	$7/4$	-44	$-1/2$	0	0
x_1	1	-3	0	$-5/4$	28	$1/2$	0	0
← x_7	0	$1/3$	0	$1/6$	-4	$-1/6$	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

Exemplo – Continuação

Iteração 7

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	$3/4$	-20	$1/2$	-6	0
$\leftarrow x_1$	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

- Note que o *tableau* da primeira iteração e o último apresentado são iguais, e que todos os pontos extremos encontrados são iguais ($\mathbf{x} = [0,0,1,0,0,0,0]^T$) mas associados a bases diferentes. Claramente, o método Simplex entrou em ciclo e não vai terminar (pelo menos encontrando a solução ótima).

Evitando A Ciclagem – Regra lexicográfica

- Considere um PL na forma canônica, com a hipótese adicional de que matriz identidade em **A** ocupa as primeiras m colunas. A regra apresentada a seguir especifica de maneira única a variável a deixar a base se o teste da taxa mínima indicar várias candidatas, garantindo a não existência de ciclagem:

Regra lexicográfica: Dada uma solução básica factível associada a uma base **B**. Suponha que uma variável não básica x_k é candidata a entrar na base. O índice r da variável x_{B_r} a deixar a base é determinado da seguinte forma: Seja

$$I_0 = \left\{ r : \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right) \right\}$$

Se I_0 tem apenas um elemento (*singleton*), isto é $I_0 = \{r\}$, então x_{B_r} deixa a base. Caso contrário, construa I_1 na forma:

$$I_1 = \left\{ r : \frac{y_{r1}}{y_{rk}} = \min_{i \in I_0} \left(\frac{y_{i1}}{y_{ik}} \right) \right\}$$

Se I_1 tem apenas um elemento, isto é $I_1 = \{r\}$, então x_{B_r} deixa a base. Caso contrário, construa I_2 e prossiga.

Evitando A Ciclagem – Regra lexicográfica

O conjunto I_j é construído a partir de I_{j-1} seguindo:

$$I_j = \left\{ r : \frac{y_{rj}}{y_{rk}} = \min_{i \in I_{j-1}} \left(\frac{y_{ij}}{y_{ik}} \right) \right\}$$

- Em algum momento, para algum $j \leq m$, I_j só vai ter um elemento r, e x_{B_j} deixará a base.

- Ilustração: Considere o *tableau* dado a seguir

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow x_5$	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	0	2	-4	-6	2
x_1	1	0	0	0	2	-1	9	0
x_2	0	1	0	0	3	-1	3	0
x_3	0	0	1	0	2	1	0	0
x_4	0	0	0	1	4	1	0	2

Conjuntos: $I_0 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $I_1 = \{x_2, x_3\}$, $I_2 = \{x_3\}$.

Exemplo

- A regra apresentada previne a ciclagem do método Simplex, pois garante que uma mesma base nunca é visitada mais de uma vez. Como existe um número finito de bases, prova-se a convergência do método Simplex mesmo diante de degeneração. Mais detalhes, incluindo a razão do termo "lexicográfico", podem ser encontrados na [BJS10, Seção 4.6].

- Considere o exemplo anterior, em que o primeiro *tableau* é dado por **Iteração 1**

	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	0	0	$3/4$	-20	$1/2$	-6	0
x_1	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9	0
$\leftarrow x_2$	0	1	0	1/2	-12	$-1/2$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1

Nesse caso, $I_0 = \{x_1, x_2\}$ e $I_1 = \{x_2\}$. Note que no exemplo anterior x_1 foi a variável excluída da base nessa iteração. Com mais duas iterações (na quais não há empate no teste da taxa mínima), o método Simplex converge para o ótimo.

Exemplo

Iteração 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\downarrow$ x_6	x_7	LD
z	0	$-3/2$	0	0	-2	$5/4$	$-21/2$	0
x_1	1	$-1/2$	0	0	-2	$-3/4$	$15/2$	0
x_4	0	2	0	1	-24	-1	6	0
$\leftarrow x_3$	0	0	1	0	0	1	0	1

Iteração 3 - Ótimo encontrado!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	LD
z	0	$-3/2$	$-5/4$	0	-2	0	$-21/2$	$-5/4$
x_1	1	$-1/2$	$3/4$	0	-2	0	$15/2$	$3/4$
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1

Referências Bibliográficas

M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali.
Linear Programming and Network Flows.
Jonh Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 4 edition, 2010.