Lista – Dualidade

Última atualização: 4 de maio de 2017

DLD.1 Forneça o dual dos seguintes problemas

(a)

$$\begin{cases} \max & z = \begin{bmatrix}4 & 1 & 5\end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix}1 & 1 & 7\\ 3 & 4 & 8\\ 5 & 6 & 9\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}10\\ 11\\ 12\end{bmatrix} \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ livre},\ x_3 \leq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \min & z = \begin{bmatrix}2 & 3 & -5 & 0\end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}5\\ 4\\ 6\end{bmatrix} \\ & x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \text{ livre} \end{cases}$$

DLD.2 Resolva graficamente o dual do seguinte problema de otimização

$$\begin{cases} \max & z = \begin{bmatrix}3 & 1 & 4\end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix}6 & 3 & 5\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix}25\\ 20\end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine, a seguir, o ótimo do problema original.

DLD.3 Considere o problema

$$\begin{cases} \max & z = \begin{bmatrix}10 & 24 & 20 & 20 & 25\end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix}19\\ 57\end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Escreva o problema dual e verifique que $w = [4 \ \ 5]$ é uma solução factível para ele.

(b) Use a informação acima para determinar soluções ótimas para os problemas primal e dual.

DLD.4 Uma solução múltipla no primal implica em que no dual? Explique.

DLD.5 Provar que o vetor multiplicador da solução ótima básica do problema primal é a solução do problema dual.

DLD.6 Sejam A^i, $i \in I$, os vetores da base ótima de um problema de PL. Suponha agora que b seja trocado por b' de tal forma que b' esteja Prove que esta base é ótima também no caso em que trocarmos b por b'. Prove que se b' estiver no cone dos vetores A^i, $i \in I$, então a base continua ótima.

DLD.7 Suponha que o o problema

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

tem uma solução ótima finita. Mostre que o problema associado

$$\begin{cases} \min & z = c^T x \\ s.a & Ax = b' \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

nunca pode ser ilimitado.

DLD.8 Encontre o dual de

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = -2x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 + 5x_6 + 10x_7 & & \\ \text{s.a} & x_1 - 2x_2 \qquad + 4x_4 - \ x_5 + \ x_6 - 4x_7 & = & 5 \\ & x_1 \qquad\qquad + 7x_4 - 2x_5 + 3x_6 - 3x_7 & \geq & -1 \\ & 5x_2 + x_3 - \ x_4 + 2x_5 - \ x_6 - 2x_7 & \leq & 5 \\ & 3x_2 + x_3 + \ x_4 + \ x_5 + \ x_6 - \ x_7 & = & 2 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5;\ x_6 \leq 0,\ x_7 \text{ livre} & & \end{array}$$

DLD.9 Obtenha a formulação dual para o problema apresentado a seguir:

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = 88x_4 - 8x_5 & & \\ \text{s.a} & -x_1 + 14x_2 + 44x_3 \qquad + 13x_5 - 9x_6 & \geq & 203 \\ & 6x_3 - 22x_4 \qquad + 40x_7 & \leq & 81 \\ & 6x_1 - \ 7x_2 \qquad + \ x_6 & = & -13 \\ & x_i \geq 0,\ j = 1, \ldots, 7 & & \end{array}$$

DLD.10 Obtenha o problema dual do PL

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 & & \\ \text{s.a} & x_2 - \ x_3 + 3x_4 - 4x_5 & = & -6 \\ & 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - \ x_4 & \geq & 2 \\ & -x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 & \leq & -5 \\ & -2 \leq x_1 \leq 10, 5 \leq x_2 \leq 25, x_3, x_4 \geq 0, x_5 \text{ livre} & & \end{array}$$

DLD.11 Determine a formulação dual para cada um dos problemas mostrados a seguir

(a)

$$\begin{array}{lrcl} \min & z = -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & & \\ \text{s.a} & 2x_1 - \ x_2 \qquad & \leq & 10 \\ & x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \geq & 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ livre} & & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rl} \max & z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.a} & 2x_1 - x_2 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_i \leq 0,\ i = 1,2 \end{array}$$

DLD.12 Sabendo que

$$\begin{array}{rl} \max & z = c^T x \\ s.a & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \overset{\text{Dual}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rl} \min & z = wb \\ s.a & wA \geq c \\ & w \geq 0 \end{array}$$

mostre que a variável dual referente à segunda restrição do problema mostrado a seguir tem que ser irrestrita:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

DLD.13 Obtenha a formulação dual dos PL apresentados a seguir

(a)

$$\begin{array}{rl} \min & z = x_1 + x_2 + x_5 - x_7 \\ \text{s.a} & 3x_1 - 2x_2 + x_4 - x_6 \geq 10 \\ & 3x_1 + 3x_3 + x_5 + x_7 \leq 7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 12 \\ & x_1, x_5, x_6 \leq 0, x_2, x_7 \geq 0, x_3, x_4 \text{ livres} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rl} \max & z = -17x_2 + 83x_4 - 8x_5 \\ \text{s.a} & -x_1 - 13x_2 + 45x_3 + 16x_5 - 7x_6 \geq 107 \\ & 3x_3 - 18x_4 + 30x_7 \leq 81 \\ & 4x_1 - 5x_3 + x_6 = -13 \\ & x_1, x_3 \leq 0, x_2, x_4, x_6, x_7 \geq 0, x_5 \text{ livre} \end{array}$$

DLD.14 [HL01, Exer. 5.3-5.] Considere o problema

$$\begin{array}{rll} \max & z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3 & \\ \text{s.a} & 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200 & (1) \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 100 & (2) \\ & 2x_1 + x_3 \leq 50 & (3) \\ & x_3 \leq 20 & (4) \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 & \end{array}$$

Sejam x_{i+3}, $i = 1, \ldots, 4$ as variáveis de folga das desigualdades (i). Após algumas iterações do método Simplex, chega-se ao quadro

x_4	x_5	x_6	x_7	
$-9/4$	$-1/2$	0	0	$z - 500$
$3/16$	$-1/8$	0	0	
$-1/4$	$1/2$	0	0	
$-3/8$	$1/4$	1	0	
0	0	0	1	

(a) Complete o quadro.

(b) Descreva a solução básica correspondente. Ela é factível? É degenerada? É ótima?

(c) A seguir, determine a solução ótima.

DLD.15 [HL01, Exer. 5.3-12.]Considere o problema

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ & x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

Resolvido pelo método do Big-M, chega-se ao seguinte quadro final:

x_4	x_5	x_6	
$-M-2$	0	$-M$	$z - 60$
1	0	0	
1	1	-1	

(a) Complete o quadro.

(b) Qual a solução ótima.

(c) De quanto deve aumentar o coeficiente C_2na função objetivo para que a solução ótima se altere?

(d) Calcule o ótimo para a nova função objetivo: $z = 2x_1 + 9x_2 + 2x_3$

DLD.16

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} \quad & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

A forma preparada correspondente à solução ótima do problema anterior é dada por

$$\begin{aligned} 2x_2 \qquad + 1/5x_4 + 3/5x_5 &= 17 \\ x_1 - 1/3x_2 \qquad + 1/3x_4 - 1/3x_5 &= 5/3 \\ x_2 + x_3 - 1/5x_4 + 2/5x_5 &= 3 \end{aligned}$$

(a) Identificar a solução ótima.

(b) Escrever o problema dual e fornecer sua solução ótima. Suponha, a seguir, que o problema original sofre alterações nos coeficientes da variável x_2

$$\begin{array}{rl} \max & z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.a} & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 25 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 20 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

(c) A solução identificada no item (a) continua factível? e ótima?

DLD.17 Seja o PL em sua formulação primal

$$\begin{array}{rl} \max & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2 \end{array}$$

cujo quadro ótimo é dado por

0	0	$-1/3$	$-1/3$	0	$z-5$
1	0	$-1/3$	$-1/3$	0	2
0	1	$2/3$	$-1/3$	0	3
0	0	$1/3$	$-2/3$	1	1

(a) Pelo teorema das folgas complementares, verifique a forma das variáveis duais.

(b) Do quadro ótimo do problema primal obtenha o valor das variáveis duais.

(c) Obtenha problema dual. Represente geometricamente os dois problemas e mostre a correspondência entre as soluções básicas dos dois problemas nas figuras.

Referências

[HL01] F. S. Hillier and G. J. Lieberman. *Introduction to Operations Research*. McGraw Hill, New York, NY, 7 edition, 2001.