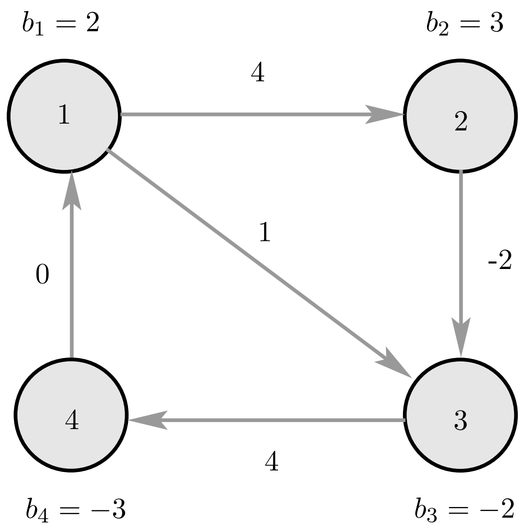
# Lista – Teoria de Grafos

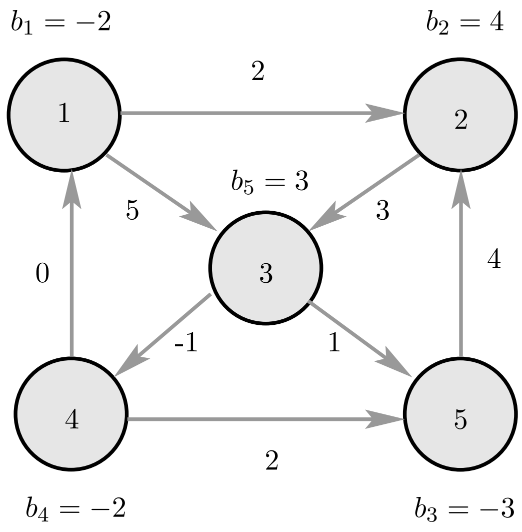
Última atualização: 6 de maio de 2019

**TG.1** [BJS90, Exer. 9.3] Resolva o problema de fluxo em rede para o grafo apresentado a seguir, usando $x_{12}$, $x_{23}$ e $x_{34}$ como integrantes da base inicial.

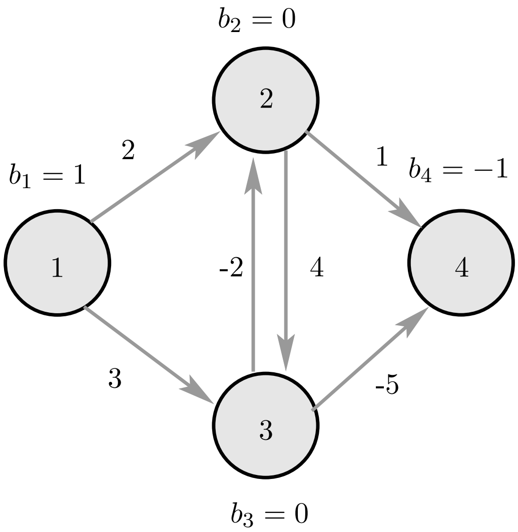



**TG.2** [BJS90, Exer. 9.4] Obtenha a solução ótima do exercício anterior usando (a) O método das duas fases; (b) O método big-M.

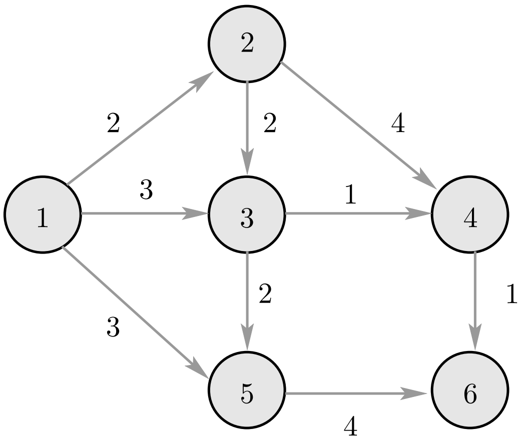
**TG.3** [BJS90, Exer. 9.7] Obtenha a solução ótima do problema de fluxo em rede para o grafo mostrado a seguir



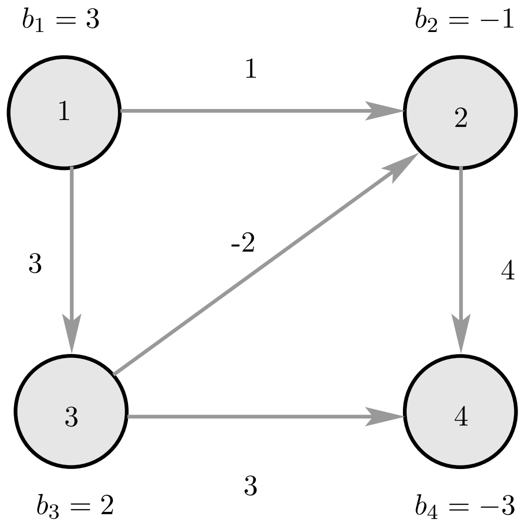

**TG.4** [BJS90, Exer. 9.8] Obtenha a solução ótima do problema de fluxo em rede para o grafo mostrado a seguir



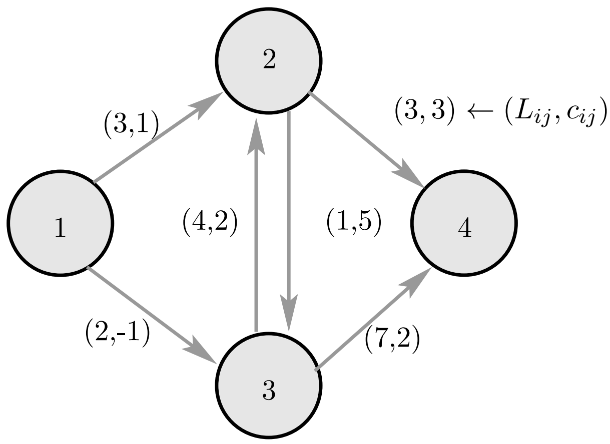

**TG.5** [BJS90, Exer. 9.9] Suponha que a figura mostrada a seguir representa uma malha ferroviária. Os custos associados aos arcos representam o tempo necessário para cruzar o arco. Duas locomotivas estão paradas no ponto 2 e uma no ponto 1. Três locomotivas são necessárias no ponto 6. Encontre o tempo total mínimo para suprir a demanda do ponto 6.



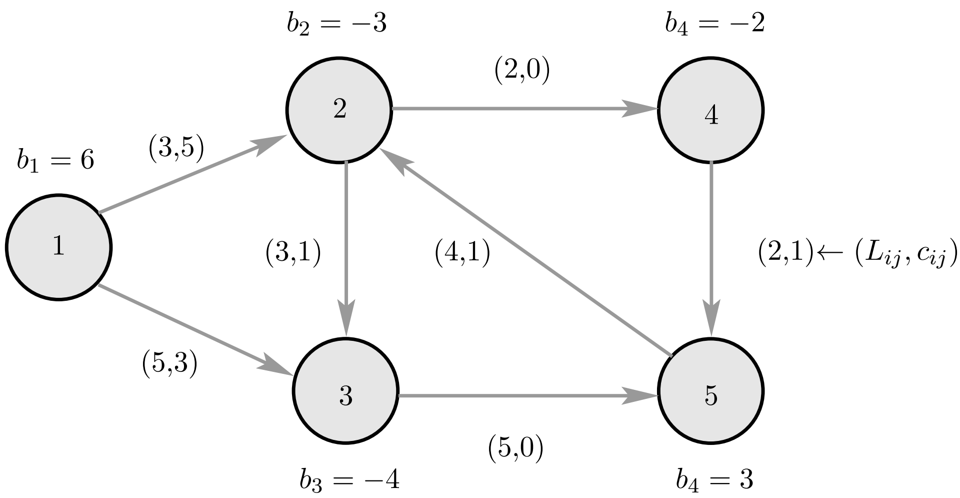

**TG.6** [BJS90, Exer. 9.9] Resolva o problema de fluxo em rede para o grafo dado a seguir (note que $\sum b_i \neq 0$).



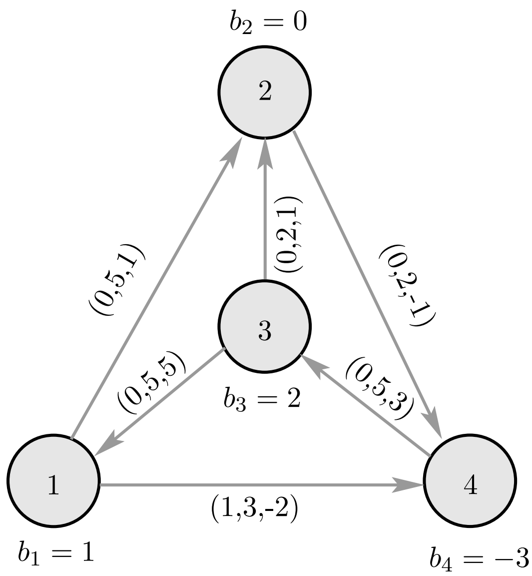

**TG.7** [BJS90, Exer. 9.13] Considere a rede mostrada a seguir. Os nós 1 e 3 possuem 5 e 2 unidades disponíveis, respectivamente. Os nós 2 e 4 necessitam de 4 e 1 unidades, respectivamente. (a) Forneça a formulação para esse problema em termos de programação linear. (b) Resolva o problema pelo método simplex adaptado para redes. A solução ótima obtida é degenerada?




**TG.8** [BJS90, Exer. 9.14] Resolva o problema de fluxo em rede para o grafo dado a seguir.




**TG.9** [BJS90, Exer. 9.15] Começando com $x_{12}$, $x_{24}$ e $x_{31}$ como parte de uma base na qual $x_{14}$ é não básica em seu limite superior e todos os outros $x_{ij}$ são não básicos em seus limites inferiores, resolva o problema de fluxo em rede para o grafo dado a seguir, sendo que $(\ell, u, c)$ representa o limite inferior, o limite superior e o custo do arco, respectivamente.



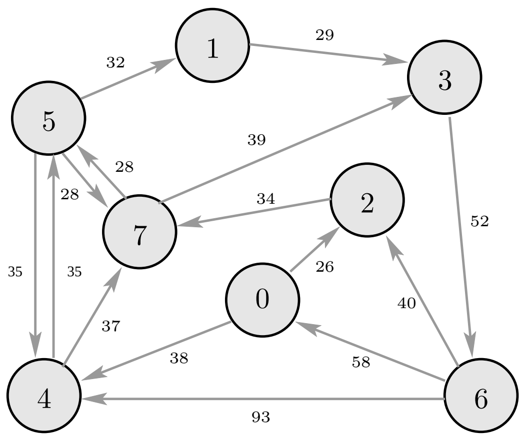

**TG.10** Aplique o método das duas fases e o método do big-M no exercício anterior.

**TG.11** Uma empresa que prozuz fogões, instalou duas fábricas, uma em São Paulo e outra em Campinas, dois depósitos, um em Baurú e outro em Riberão Preto. Cada fábrica produz 1000 unidades por mês e toda produção é enviada aos depósitos, para depois serem distribuídos para Franca, Araçatuba e Ourinhos, com demandas de: 400, 450 e 610, respectivamente. Transferência entre os depósitos é limitada em 25 unidades por mês, sem custo. Os custos de transporte estão apresentados na tabela dada a seguir

| De/Para | Bauru | Ribeirão Preto | Franca | Araçatuba | Ourinhos |
|---|---|---|---|---|---|
| São Paulo | 7 | 8 | - | - | - |
| Campinas | 4 | 7 | - | - | - |
| Bauru | - | - | 25 | 5 | 17 |
| Ribeirão Preto | - | - | 29 | 8 | 5 |

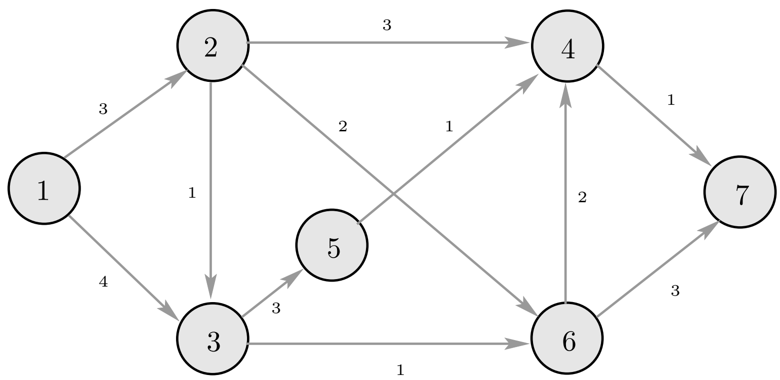
Formule o problema como de programação linear, resolva utilizando o simplex tradicional e depois com o simplex adaptado para redes.

**TG.12** [SW11, pág. 653] Encontre a árvore de caminhos mínimos para o grafo dado a seguir usando o algoritmo de Dijkstra.




**TG.13** Para o grafo do exercício anterior, substitua os custos das arestas $(6, 2)$, $(6, 0)$ e $(6, 4)$ por -120, -140 e -125 respectivamente. Encontre a árvore de caminhos mínimos usando Bellman-Ford.

**TG.14** Compute a árvore de caminhos mínimos usando o algoritmo de Dijkstra e de Bellman-Ford para o grafo dado a seguir. Desconsiderando a direção dos arcos, determine a árvore geradora mínima usando os algoritmos de Prim e Kruskal.



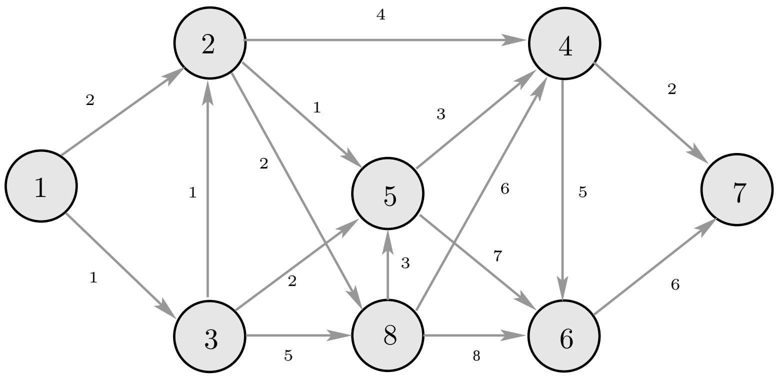

**TG.15** Seja $c$ uma constante positiva e $c_{ij}$ os custos associados às arestas de um grafo. Mostre que se os custos de todas as arestas forem substituídos por $c + c_{ij}$ ou $c \times c_{ij}$, a árvore geradora mínima permanece a mesma. A afirmativa permaneceria válida se $c$ fosse negativa? Explique.

**TG.16** Mostre que se um grafo tiver todas as arestas com custos distintos, então a árvore geradora mínima é única. Dica: prove por contradição.

**TG.17** Como você encontraria a árvore geradora máxima em um grafo ponderado?

**TG.18** Seja um grafo ponderado com arestas negativas. Suponha agora que uma constante positiva seja adicionada ao custo de todas as arestas, de modo que não existam mais arestas com pesos negativos. Sejam $s$ e $d$ vértices de origem e destino. Mostre que o caminho mínimo do grafo modificado entre $s$ e $d$ pode ser diferente do grafo original.

**TG.19** Seja o grafo apresentado na Figura a seguir em que os nós denotam cidades.




A partir da árvore de caminhos mínimos, determine a menor rota entre as cidades 1 e 7.

**TG.20** Seja $(u, v)$ a aresta com menor peso em um grafo conexo $G$. Mostre que $(u, v)$ pertence a alguma árvore geradora mínima de $G$.

**TG.21** O professor da disciplina de otimização linear conjectura o seguinte teorema:

***Teorema 1*** *Seja $G(N, A)$ um grafo conexo não direcionado e ponderado. Seja $\tilde{A}$ um subconjunto de $A$ cujas arestas pertence a alguma árvore geradora mínima de $G$, e $(S, \bar{S})$ um corte em que $\tilde{A}$ pertence a $S$ ou a $\bar{S}$. Seja também $(u, v)$ uma aresta que cruza o corte $(S, \bar{S})$ e que garantidamente está em uma árvore geradora mínima. Então, $(u, v)$ é a aresta de menor custo do corte.*

Mostre que a conjectura do professor é falsa por meio de um contraexemplo.

**TG.22** Forneça um exemplo simples de grafo conexo tal que o conjunto de arestas definido por $\{(u, v) :$ existe um corte $(S, \bar{S})$ tal que $(u, v)$ é a resta de menor custo cruzando $(S, \bar{S})\}$ não forma uma árvore geradora mínima.

**TG.23** Seja um grafo $G$ e uma árvore geradora mínima associada $T^\star$. Suponha que o peso de uma das arestas fora de $T^\star$ seja diminuído. Forneça um algoritmo (sequência de passos) para encontrar a árvore geradora mínima do grafo modificado.

## Software computacional

Os exercícios de Simplex para redes podem ser resolvidos usando uma rotina em Matlab, disponível para download em

`http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA881/netSimplex.zip`

A senha do arquivo é: ia881

Um site bem interessante para resolver o problema de caminho mínimo e arvore geradora mínima é:

`https://visualgo.net`

## Referências

[BJS90] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows.* Jonh Wiley & Sons, Singapore, 2 edition, 1990.

[SW11] R. Sedgewick and K. Wayne. *Algorithms.* Pearson Education, Boston, MA, 4 edition, 2011.