Lista – Simplex

Última atualização: 16 de março de 2017

SPX.1 Seja o PL

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ s.a & \begin{array}{rl} |x_1 + 2x_2 + 10| & \geq 4 \\ x_1 - x_2 & \leq 5 \end{array} \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(a) Resolva usando o método Simplex. (b) Faça a interpretação geométrica no plano $x_1 \times x_2$.

SPX.2 Suponha que ao final da FASE I exista pelo menos uma variável artificial na base, indicando que o sistema original, $Ax = b,\ x \geq 0$ é inconsistente. Diferencie os dois seguintes casos:

(a) O sistema $Ax = b$ é incompatível.

(b) O sistema $Ax = b$ é compatível, mas implica em $x \geq 0$.

SPX.3 Resolver com o auxílio do algoritmo simplex o seguinte PL

$$\begin{cases} \min & z = 9x_1 + 6x_2 + 12x_3 \\ s.a & \begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \geq 6 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.4 Explique se é possível encontrar uma solução tipo β na FASE I.

SPX.5 Seja o PL

$$\begin{cases} \min & z = \begin{bmatrix} 10 & 24 & 20 & 20 & 25 \end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 19 \\ 57 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

e a seguinte solução factível associada $x^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A partir dessa solução, determine uma solução básica factível.

SPX.6 Procurar uma solução factível para:

$$\begin{cases} \min & z = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T x \\ s.a & \begin{bmatrix} 3 & 10 & 5 \\ 33 & -10 & 9 \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} 15 \\ 33 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} x \geq 4 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.7 Elabore um diagrama de blocos para uma rotina computacional que obtenha uma solução básica factível, a partir de uma solução factível conhecida.

SPX.8 Admitindo a inexistência de soluções degeneradas, apresente um argumento convincente para a convergência do algoritmo simplex.

SPX.9 Uma indústria pode fabricar dois produtos (P_1 e P_2) a partir de duas matérias primas (A e B), cujas disponibilidades são respectivamente 14 e 10. Para produzir P_1 utiliza-se 2 unidades de cada uma das matérias primas e 1 unidade de mão de obra (u.m.o.). Para P_2 utiliza-se 3 unidades de A, 1 de B e 1 u.m.o. O produto P_1 fornece um lucro unitário de \$5 e P_2 de \$1. A agência financiadora exige a absorção de pelo menos 8 u.m.o.

(a) Formule o problema.

(b) Pela resolução de uma FASE I, mostre que ele é infactível.

(c) Você tem o direito de relaxar uma das restrições de matéria prima (aquisição livre de custo). Mostre que a decisão correta é relaxar a restrição de A. Sugestão: no quadro ótimo, permita que a variável de folga correspondente à matéria prima A possa crescer negativamente.

(d) Determine o ótimo do problema relaxado.

(e) Visualize o problema relaxado no plano (matéria prima B) $\times$ (mão de obra)

SPX.10 Seja o seguinte PL no qual v_1 e v_2 são variáveis artificiais e apenas x_3 é variável de folga.

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ & \begin{array}{rrrrl} 2x_1 & +3x_2 & & +v_1 & = 5 \\ 6x_1 & +9x_2 & & +v_2 & = 15 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 0 \end{array} \\ s.a & \\ & x \geq 0, \ v \geq 0 \end{cases}$$

No final da FASE I o quadro Simplex é o seguinte

X_1	X_2	X_3	V_1	V_2	LD	
0	0	0	4	0	(min)	(Func. Artificial)
$\boxed{1}$	0	$-3/5$	$1/5$	0	1	Ponto A
0	0	0	-3	$\boxed{1}$	0	
0	1	$2/5$	$2/5$	0	1	

Obtenha a solução ótima do PL dado. Explique por meio de um gráfico a caminhada rumo ao ótimo, a partir do ponto dado pelo quadro acima.

SPX.11 Resolver pelo método das duas fases e dar uma interpretação geométrica

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \geq 3 \\ s.a & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -3 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.12 Considere o problema

$$\begin{cases} \min & z = 14x - 18x_3 - 16x_4 - 80x_5 \\ & -4,5x + 8,5x_3 + 6x_4 + 20x_5 \leq 6000 \\ s.a & x + x_3 + 4x_4 + 40x_5 \leq 4000 \\ & x \text{ livre}, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Complete o quadro

		x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
					$1/4$	$-1/8$	
					$-1/160$	$9/320$	

(a) Determine a base e a solução básica correspondente

(b) Encontre $(A^I)^{-1}$

(c) Determine π e πb

(d) Este quadro é ótimo? Comente.

SPX.13 Dado o problema de maximização representado na figura a seguir, na qual o poliedro ABC representa o conjunto factível de um PL e ∇f é o gradiente da função objetivo no ponto $(0, 0)$:

(a) Descreva o problema PL em forma analítica.

(b) Quantas soluções básicas factíveis tem o problema? Escreva o conjunto de índices I correspondente a cada solução básica factível.

(c) Mostre, caso haja, uma solução degenerada ao problema e o(s) conjunto(s) J correspondente (s).

(d) O problema tem alguma redundância? Qual? Explique.

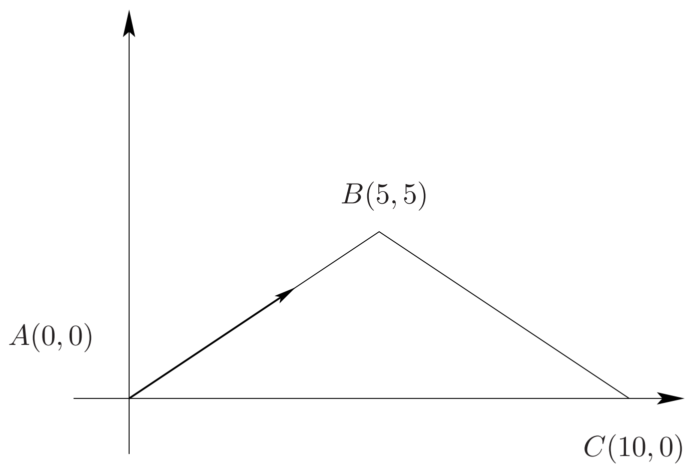
(e) Escreva o problema na forma preparada em relação a cada um dos conjuntos básicos factíveis.

(f) Quantas soluções ótimas tem o problema? Apresente o conjunto de soluções ótimas escrito em forma analítica. Este conjunto corresponde a que na figura?

(g) Olhando para uma forma preparada do problema acima, como você determina

- que ela é ótima
- o valor das variáveis ótimas?
- o valor da função objetivo?
- sendo a forma ótima, se há soluções alternativas ótimas?

(h) Quantas soluções básicas tem o problema? Mostre-as na figura. Este número é menor que o previsto teoricamente? Por que?



SPX.14 Resolva algebricamente o PL abaixo:

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ s.a & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.15 Obtenha uma solução básica factível para o problema abaixo utilizando fase I do método Simplex.

$$\begin{cases} \max & z = x_1 \\ & \begin{array}{lllll} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 10 \end{array} \\ s.a & \begin{array}{lllll} 3x_1 & +3x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 11 \end{array} \\ & \begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & -x_4 & = 1 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.16 Coloque o problema na forma preparada em relação à base $\{2, 4, 1\}$, na qual x_4 é uma variável de folga. A partir da análise do quadro obtido, diga qual a solução do problema e justifique.

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - 2x_2 \quad \leq 4 \\ s.a & -x_1 + x_2 \quad \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \quad \leq 5 \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.17 Resolva o PL utilizando a fase I se necessário:

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + 3x_2 \\ & \begin{array}{llll} x_1 & & +3x_3 & \leq 5 \\ & x_2 & & \leq 5 \\ 3x_1 & & +2x_3 & \geq 6 \\ x_1 & +x_2 & & \leq 10 \end{array} \\ s.a & \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Quantas soluções básicas ótimas o problema tem?

(b) Alguma solução ótima é degenerada? Qual?

(c) O problema tem alguma restrição redundante? Qual?

(d) Qual a relação entre a redundância e a degenerescência, em caso de (b) e (c) serem afirmativas?

(e) Faça uma interpretação geométrica.

SPX.18 Ache a solução ótima pelo método das duas fases para os PLs apresentados a seguir:

(a)

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ & \begin{array}{llllll} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 2 \end{array} \\ s.a & \begin{array}{llllll} 8x_1 & -x_2 & & +x_4 & = 40 \end{array} \\ & \begin{array}{llllll} 5x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 46 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ & \begin{array}{llllll} -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \end{array} \\ s.a & \begin{array}{llllll} 8x_1 & -x_2 & & +x_4 & & = 40 \end{array} \\ & \begin{array}{llllll} -x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & = 24 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ & \begin{array}{lll} x_1 & +x_2 & \geq 5 \\ -x_1 & +3x_2 & \leq 10 \\ 2x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ -x_1 & +x_2 & \leq 5 \end{array} \\ s.a & \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 + 0x_3 \\ s.a & \begin{array}{llll} x_1 & & +x_3 & \geq 1 \\ x_1 & -3x_2 & -x_3 & \geq 1 \\ x_1 & -x_2 & +5x_3 & \geq 5 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 5 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.19 Resolver pelo método das duas fases:

$$\begin{cases} \max & z = x_1 + x_2 \\ s.a & \begin{array}{lll} -x_1 & +x_2 & \geq 3 \\ x_1 & +x_2 & \leq 27 \\ 2x_1 & -x_2 & \leq -3 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

SPX.20 Seja o PL

$$\begin{cases} \min & z = 4x_1 + 12x_2 \\ s.a & \begin{array}{lll} 2x_1 & +x_2 & \geq 6 \\ x_1 & +3x_2 & \leq 8 \\ x_1 & & \geq 4 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Resolva aplicando a Fase I.

(b) Encontrando o ótimo, verifique se existe soluções ótimas alternativas. Explique.

(c) Resolva o mesmo problema mas maximizando $z = x_1 + x_2$.

SPX.21 Considere o PL

$$\begin{cases} \min & z = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ s.a & \begin{array}{lllllll} -x_1 & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & & & = 6 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & & +x_5 & & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & = 2 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Após algumas iterações, obteve-se o quadro simplex mostrado a seguir

0	0	0	1	0	2	$f+10$
1	$-1/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$	$2/3$
0	2	0	0	1	1	4
0	$2/3$	1	$1/3$	0	$1/3$	$8/3$

(a) Determine a base e a solução básica correspondente ao quadro.

(b) Encontre a matriz inversa $(A^I)^{-1}$.

(c) Determine o vetor multiplicador.

(d) Encontre o valor de πb. comente.

(e) Este quadro é ótimo? Comente.

(f) Há uma solução alternativa à apresentada no quadro, com o mesmo valor de função objetivo? Explique

SPX.22 Uma indústria de móveis produz linhas de móveis e deseja saber qual a produção em cada linha que melhor utiliza seus recursos de mão de obra. São disponíveis mensalmente 24000 horas-homem no setor de carpintaria e 18000 horas-homem e no setor de acabamento. A primeira linha de móveis (colonial) consome 300 horas-homem por unidade produzida, tanto na seção de carpintaria como na de acabamento. A segunda linha de móveis (moderna) consome 400 horas-homem na carpintaria e 200 horas-homem no acabamento por unidade produzida. Estima-se a lucratividade da linha colonial em \$ 1050 por unidade e a lucratividade da linha moderna em \$ 1000 por unidade.

(a) Formule matematicamente o problema.

(b) Resolva usando o algoritmo Simplex.

(c) Sabendo que os salários de mercado são \$1.2/hora (carpintaria) e \$2.0/hora (acabamento) seria interessante contratar empregados na indústria?

SPX.23 Uma fábrica de papel recebeu três pedidos para a venda de rolos, quais sejam:

Pedido	Largura	Comprimento (m)
1	5	10000
2	7	30000
3	9	20000

Os rolos são produzidos em duas larguras padrões: 10 e $20m$. Não existe limite de comprimento e o objetivo é minimizar as perdas. Formule como um PL e resolva.

SPX.24 Seja o seguinte PL

$$\begin{cases} \max & z = -x_1 + Cx_2 \\ s.a & \begin{array}{rrl} -x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq 7 \end{array} \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Determine os valores de C para as quais a solução é: (a) única. (b) múltipla. (c) tipo β.

SPX.25 Uma certa fábrica produz 3 produtos (I, II e III), a partir da mesma matéria prima. A quantidade de matéria prima necessária, espaço para armazenamento, emprego de mão de obra e lucro, estão na tabela mostrada a seguir. A quantidade total de matéria prima disponível por dia é de 120 kg, e a área total para armazenamento da produção diária é de 140 m^2. Por exigência governamental (decorrente de incentivos), um mínimo de 300 homens-horas deve ser usado na produção diária. Toda a produção será escoada no final do dia.

(a) Formule o problema;

(b) Pela resolução de uma FASE I, mostre que não existe um plano diário de produção factível;

(c) Se for possível adquirir uma quantidade adicional de matéria prima a custo de 6 u.m.p/kg, determine o melhor plano diário de produção.

	I	II	III
Matéria prima (kg/peça)	2	2	1
Espaço para Armazenamento (m^2 p/peça)	2	1	2
Mão de Obra (homens-hora p/peça)	2	3	3
Lucro (u.m.p./peça)	10	5	10