

IA881 – Otimização Linear

Aula: Fluxo de Custo Mínimo (*Minimum Cost Flow*)

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1º Semestre 2019

Tópicos

1 Definições e notações

2 Fluxo de Custo Mínimo

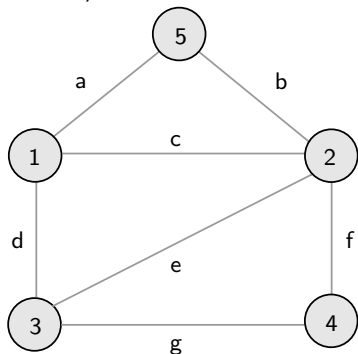
3 Simplex para redes

Conceitos, Definições, Notações I

Definição 1

Sejam \mathcal{N} um conjunto de **vértices** e \mathcal{A} um conjunto de **arestas** ligando os vértices $v \in \mathcal{N}$. Define-se grafos como sendo $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$. $n = |\mathcal{N}|$ representa o número (cardinalidade) de vértices e $m = |\mathcal{A}|$ o número (cardinalidade) de arestas.

- Observação: vértice = nó; aresta = ramo (não-orientado) ou arco (orientado)



- $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\mathcal{A} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

Figura 1: Grafo não orientado.

Conceitos, Definições, Notações II

- Uma alternativa para representar uma aresta é por meio da notação (x,y) com $x,y \in \mathcal{N}$. Por exemplo, no grafo da Figura 1, a aresta b poderia ser representada por $(2,5)$ ou $(5,2)$. Caso a aresta seja direcionada (arco), convencionou-se que a primeira componente seja o vértice de origem e a segunda o vértice de destino.

Definição 2

Grafo *orientado* ou *direcionado* (não orientado ou não direcionado) – quando as arestas têm (não têm) orientação.

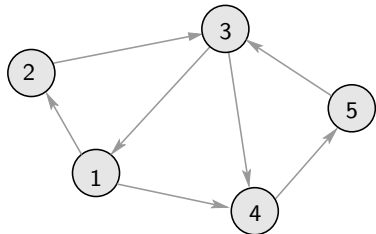


Figura 2: Exemplo de um grafo orientado.

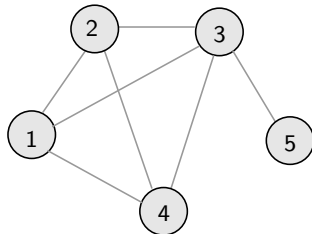


Figura 3: Exemplo de um grafo não orientado.

Conceitos, Definições, Notações III

Definição 3

Um grafo é dito **ponderado** (ou valorado) se suas arestas possuem custos (ou pesos) associados. Usa-se a notação c_{ij} (ou $c(i,j)$) para denotar o custo da aresta entre os vértices i e j .

Definição 4

$G_S(\mathcal{N}_S, \mathcal{A}_S)$ é um **sub-grafo** de $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ se $\mathcal{N}_S \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{A}_S \subseteq \mathcal{A}$ tal que se $(i,j) \in \mathcal{A}_S \Rightarrow i,j \in \mathcal{N}_S$. Um grafo $G_S(\mathcal{N}_S, \mathcal{A}_S)$ é um **sub-grafo gerador** de $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ se $\mathcal{N}_S = \mathcal{N}$ e $\mathcal{A}_S \subseteq \mathcal{A}$.

Conceitos, Definições, Notações IV

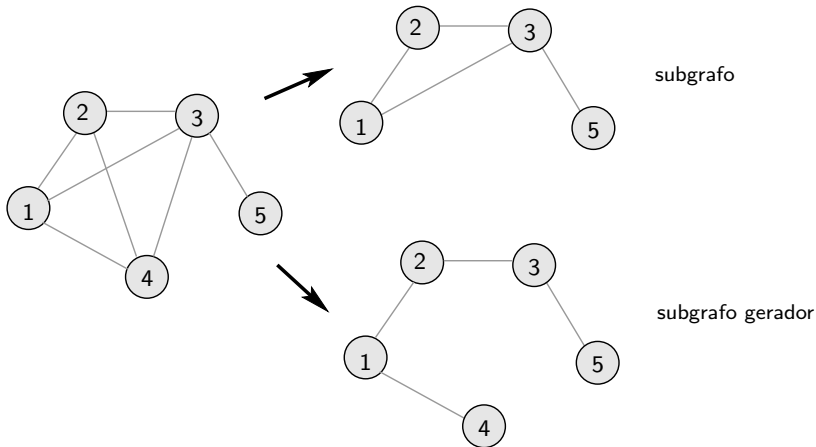


Figura 4: Exemplo de subgrafos (gerador e não gerador).

Conceitos, Definições, Notações V

Definição 5

Grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele (no caso orientado, arcos que entram mais que saem). Um nó de grau 1 também é chamado de *nó folha*.

Definição 6

Cadeia é uma sequência consecutiva de arestas em que todos os nós visitados são **distintos**. Exemplo: na Figura 2 – $\{(2,3)(5,3)(4,5)(1,4)\}$.

Definição 7

Caminho é um caso particular de cadeia na qual os arcos têm os **mesmos sentidos**. Exemplo Figura 2 – $\{(2,3)(3,1)(1,4)(4,5)\}$

Definição 8

Comprimento de um caminho é a soma dos pesos (ou custos) das arestas do caminho.

Conceitos, Definições, Notações VI

Definição 9

Um grafo é dito ser **conexo** se sempre existe uma cadeia entre qualquer par de vértices.

Definição 10

Ciclo ou **laço** é uma cadeia fechada (termina no nó que iniciou). Exemplo na Figura 2 – $\{(3,1)(1,4)(3,4)\}$

Definição 11

Circuito (ciclo direcionado) é um caminho fechado. Exemplo na Figura 2 – $\{(2,3)(3,1)(1,2)\}$

Definição 12

Uma **árvore** é um grafo conexo que não contém ciclos.

Conceitos, Definições, Notações VII

- Exemplos de árvore obtidas a partir do grafo da Figura 2: (1) removendo-se as arestas $(2,3)$, $(1,4)$ e $(5,3)$; (2) removendo-se as arestas $(1,4)$, $(3,1)$ e $(3,4)$; Existem outras possibilidades.

Propriedades de uma árvore

Um grafo G com n vértices é uma árvore se e somente se ele satisfaz qualquer uma das seguintes condições

- G possui $n - 1$ arestas e nenhum ciclo.
- G possui $n - 1$ arestas e é conexo.
- G é conexo, mas a remoção de uma aresta torna-o desconexo.
- G não tem ciclos (acíclico), mas introduzir uma nova aresta produz um ciclo.
- Quaisquer dois vértices de G estão conectados por um caminho único.

Conceitos, Definições, Notações VIII

Definição 13

Uma árvore T é uma *árvore geradora* de um grafo $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ se T é um sub-grafo gerador de G .

Definições e hipóteses

- Considere um grafo (rede) direcionado $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ com n nós e m arcos. A todos os nós $i \in \mathcal{N}$, considerados como pontos de entrada e saída da rede, associa-se um coeficiente b_i tal que
 - Se $b_i > 0$ então é um nó de **fornecimento** (ou de produção).
 - Se $b_i < 0$, então é um nó de **demanda** (ou de consumo).
 - Se $b_i = 0$, então é um nó de **passagem** (ou de transbordo).
- A rede é considerada **equilibrada**, com excedente de produção ou com excedente de demanda, se $\sum_{i \in \mathcal{N}} b_i$ é nula, positiva ou negativa, respectivamente.
- A cada arco (i, j) do grafo, seja x_{ij} a quantidade de **fluxo** que passa pelo arco (assume-se que $x_{ij} \geq 0$) e c_{ij} o **custo** unitário de transporte pelo arco. Assume-se que a rede está equilibrada. Para o caso de excedente de produção, pode-se criar um nó adicional $n+1$ com $b_{n+1} = -\sum_{i \in \mathcal{N}} b_i$ e arcos de custo nulo ligando este novo nó e todos os nós de fornecimento.

Definição do problema I

Problema do fluxo de custo mínimo (PFCM)

Enviar os recursos disponíveis de modo a atender a demanda com o **menor custo** possível.

Matematicamente, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.a} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i \\ \quad \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{array} \right.$$

■ As restrições

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = b_i$$

são chamadas de “balanço de fluxo” (ou de conservação de fluxo ou equações de Kirchoff) nos nós e indicam que nenhum fluxo pode ser criado ou destruído pela rede. A primeira parcela indica o fluxo que sai do nó (sinal positivo), e a segunda o fluxo que entra no nó (sinal negativo), conforme indica a Figura 5.

Definição do problema II

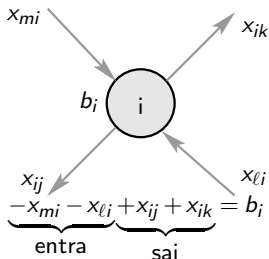


Figura 5: Balanço de fluxo no nó.

- A Figura 6 apresenta um exemplo para o qual é obtida a modelagem matemática.

Definição do problema III

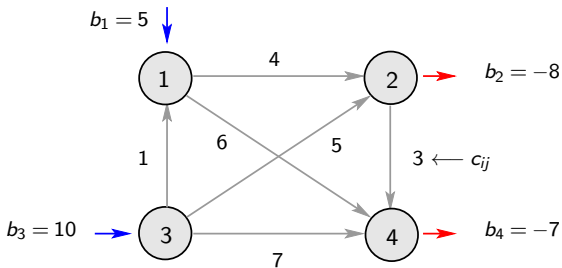


Figura 6: Grafo com 4 nós e 6 arestas.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = 4x_{12} + 6x_{14} + 3x_{24} + x_{31} + 5x_{32} + 7x_{34} \\ \quad \quad x_{12} \quad +x_{14} \quad \quad -x_{31} \quad \quad \quad = 5 \\ \text{s.a} \quad -x_{12} \quad \quad +x_{24} \quad \quad -x_{32} \quad \quad = -8 \\ \quad \quad \quad \quad \quad +x_{31} \quad +x_{32} \quad +x_{34} \quad = 10 \\ \quad \quad \quad -x_{14} \quad -x_{24} \quad \quad \quad -x_{34} \quad = -7 \\ \quad \quad x_{ij} \geq 0, \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{array} \right.$$

Forma padrão e matriz A I

- O exemplo anterior pode ser colocado na forma padrão de programação linear:

$$\text{Forma padrão de PL: } \begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

sendo que a matriz A é conhecida como **matriz de incidência nó-arco**. Que tal estudarmos algumas de suas propriedades? Para o exemplo anterior, tem-se

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (1,2) & (3,1) \\ (1,4) & (2,4) \\ (3,2) & (3,4) \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

Note que cada **coluna** está relacionada a um **arco** e cada **linha** a um **nó**. Seja o vetor unitário

$$e_i = \left[0 \ 0 \ \dots \ \underbrace{1}_{i\text{-ésimo}} \ \dots \ 0 \ 0 \right]^T$$

Forma padrão e matriz A II

Observe que qualquer coluna da matriz A , referente ao arco (i,j) , pode ser representada na forma

$$A_{(i,j)} = e_i - e_j = \begin{bmatrix} \vdots \\ +1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

Propriedade

Para um grafo $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ conexo, a matriz A tem rank igual a $n - 1$

■ Observações: É imediato verificar (a partir da estrutura das colunas) que a matriz A não tem rank completo (de linhas) pois a soma de todas as linhas fornece uma linha de zeros. Ou seja, o rank é menor que n . Para mostrar que o rank é igual a $n - 1$, tome uma árvore geradora (sempre existe) do grafo e mostre

Forma padrão e matriz A III

que a matriz A_T correspondente (uma submatriz de A) é tal que $\text{rank}(A_T) = n - 1$.

■ Seja A_T uma árvore geradora (n nós e $n - 1$ arcos), cuja representação matricial fornece uma matriz de dimensão $n \times (n - 1)$. Usando propriedades, sempre é possível representar essa matriz na seguinte forma

$$A_T = \left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \times & A_{T'} \end{array} \right]$$

sendo $A_{T'}$ uma subárvore obtida com a retirada de um nó de grau 1 (folha) e seu arco associado, portanto de dimensão $(n - 1) \times (n - 2)$ (ver Figura 7).

Forma padrão e matriz A IV

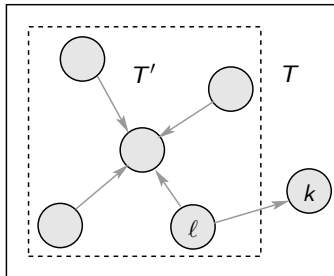


Figura 7: Remoção de um nó folha de uma árvore geradora.

Forma padrão e matriz $A'V$

- Aplicando o mesmo processo em A'_T e assim sucessivamente, obtém-se a seguinte representação

$$A_T = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \times & \pm 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \times & \times & \cdots & \pm 1 \\ \times & \times & \cdots & \mp 1 \end{bmatrix}$$

Removendo a última linha, tem-se uma matriz de dimensão $(n-1) \times (n-1)$ triangular inferior, com ± 1 nos elementos da diagonal. Portanto, essa matriz tem $\text{rank}=(n-1)$ e seu determinante (produto dos elementos da diagonal) vale ± 1 .

- Considere o exemplo anterior e a árvore geradora (escolhida arbitrariamente) apresentada na Figura 8.

Forma padrão e matriz A VI

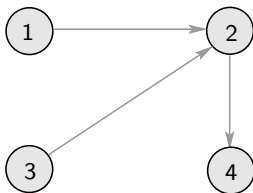


Figura 8: Árvore geradora para o grafo da Figura 6.

A matriz de incidência A_T dessa árvore é

$$A_T = \begin{array}{ccc|c}
 & (1,2) & (2,4) & (3,2) \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} & \Rightarrow A_T = \begin{array}{ccc|c}
 & (1,2) & (2,4) & (3,2) \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{array}
 \end{array}$$

Forma padrão e matriz A VII

Descartando-se a última linha, chega-se a

$$A_T = \begin{array}{ccc|c} & (1,2) & (2,4) & (3,2) \\ \hline & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 3 \end{array}$$

que é uma matriz de rank $n - 1 = 3$.

Criando uma base II

fornecendo a seguinte solução básica para o problema original (não necessariamente factível)

$$A_T = B = \begin{array}{cccc|c} & (1,2) & (2,4) & (3,2) & a.r. & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array} \quad (2)$$

Note que a matriz continua com estrutura bloco triangular inferior (tem rank completo). Outro detalhe importante é que a coluna referente ao arco raiz (a.r.) sempre estará presente em qualquer solução básica (por que será?).

- Também é fácil perceber que uma solução básica não poderia conter um ciclo, pois nesse caso a coluna correspondente a um dos arcos do ciclo pode ser escrita como combinação dos outros arcos do ciclo (linearmente dependente).
- Em resumo, mostrou-se que uma árvore geradora enraizada corresponde a uma solução básica. Também é possível mostrar o oposto, ou seja, toda solução básica corresponde a uma árvore geradora enraizada. Assim, temos

Criando uma base III

Teorema

Considere o problema de fluxo de custo mínimo em um grafo direcionado conexo G com um nó raíz. Então a matriz B é uma solução básica para o problema **se e somente se** ela for uma matriz de incidência associada a uma árvore geradora enraizada de G .

Integralidade

- Seja B uma matriz base para um grafo conexo enraizado (garantidamente está associada a uma árvore geradora enraizada). Uma solução básica pode ser computada pela expressão (considerando $n = 4$)

$$Bx^B = b \Rightarrow \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \pm 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & \pm 1 & 0 \\ \times & \times & \times & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^B \\ x_2^B \\ x_3^B \\ x_4^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Pela estrutura triangular inferior, o sistema de equações pode ser resolvido por substituições sucessivas. Como os elementos da triangular inferior só podem assumir os valores $\{-1, 0, 1\}$, nota-se que todas as variáveis só podem resultar em números inteiros se $b_j \in \mathbb{Z}$. Assim, caso soluções inteiras sejam uma restrição do problema, a solução pode ser calculada ignorando essa restrição sempre que $b_j \in \mathbb{Z}$.

Unimodularidade

Definição 14

Seja A uma matriz qualquer e A_S qualquer uma de suas submatrizes quadradas. A é **totalmente unimodular** se o determinante de qualquer A_S vale 0 ou -1 ou 1 .

- Usando indução, é possível mostrar que uma matriz de incidência nó-arco A é totalmente unimodular. Note que a propriedade se mantém se acrescentarmos colunas unitárias e_i (oriundas de arcos associados a variáveis de folga, excesso e artificiais) a A .
- Como consequência, qualquer base B também é totalmente unimodular. Além, B^{-1} contém entradas valendo apenas 0 ou -1 ou 1 . Finalmente, note que após a atualização de qualquer coluna de A por meio da operação $B^{-1}A_{(i,j)}$, obtém-se um vetor $y_{(i,j)}$ também composto apenas de 0 ou -1 ou 1 , pois

$$y_{(i,j)_k} = \frac{\det B_k}{\det B} \quad (\text{regra de Cramer})$$

Método Simplex adaptado para redes

- O método simplex tradicional pode ser resumido da seguinte maneira:
Determine uma solução básica inicial factível; Determine os custos reduzidos para cada variável não básica; Se a otimalidade foi atingida, pare; caso contrário selecione uma coluna não básica para entrar na base; Se uma solução ilimitada não for detectada, determine a coluna que sai (por bloqueio) e realize o pivoteamento.
- Na sequência são discutidas cada uma dessas operações para o Simplex adaptado para redes.

Determinando o valor das variáveis básicas I

- Considere o grafo da Figura 6 com um arco raiz no nó 2 e como solução básica inicial a árvore geradora enraizada formada pelos arcos x_{14} , x_{32} , x_{34} e x_{ar} , como mostra a Figura 10.

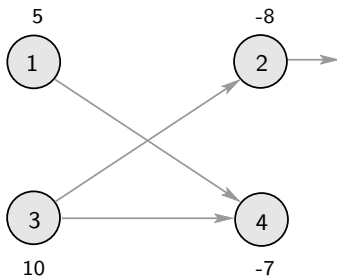


Figura 10: Árvore geradora enraizada no nó 2 para o grafo da Figura 6.

Determinando o valor das variáveis básicas II

As variáveis básicas

$$x^B = [x_{14} \quad x_{32} \quad x_{34} \quad x_{ar}]^T$$

podem ser determinadas de duas maneiras. A primeira seria pela resolução do sistema de equações $Bx^B = b$, isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{32} \\ x_{34} \\ x_{ar} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{14} = 5 \\ x_{32} = 8 \\ x_{34} = 2 \\ x_{ar} = 0 \end{array} \quad (3)$$

que pode ser resolvido por substituições sucessivas.

■ A segunda possibilidade é obter os valores diretamente no grafo aplicando o balanço de fluxo nos nós, **começando com os nós folhas e indo em direção ao nó raiz**. Por exemplo, no nó folha 1 tem-se diretamente que $x_{14} = 5$. Para o nó 4, tem-se $-x_{14} - x_{34} = -7 \Rightarrow x_{34} = 2$, e assim por diante.

■ Note que essa solução básica coincidentemente é factível. A busca sistemática por uma solução básica inicial factível é discutida mais adiante.

Determinando os custos relativos I

- No Simplex clássico é necessário avaliar os custos relativos \hat{c} referentes às variáveis não básicas. Esse cômputo pode ser realizado por meio do cômputo de π (multiplicadores Simplex),

$$\pi = c^B B^{-1} \Rightarrow \pi B = c^B$$

sendo c^B o vetor de custos associado aos arcos presentes na base, e na sequência computando os custos relativos

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \pi A_{(i,j)}$$

- Uma alternativa é determinar o vetor π e os custos relativos das variáveis não básicas de modo gráfico. Para o cômputo de π , inicia-se com o cálculo do multiplicador associado ao nó raiz e prossegue-se em direção aos nós folhas usando a relação $\pi_i - \pi_j = c_{ij}$. Em posse de π , os custos relativos referentes aos arcos não básicos são calculados por

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \pi A_{(i,j)} = c_{ij} - (\pi_i - \pi_j)$$

Determinando os custos relativos II

Se todos os custos relativos forem não negativos, então a solução é ótima. Caso contrário uma variável não básica com custo negativo é escolhida para entrar na base.

- Considere a solução básica inicial factível dada pela árvore mostrada na Figura 3. A Figura 11 mostra o cálculo de π graficamente, partindo de $\pi_2 = 0$ (nó raiz).

Determinando os custos relativos III

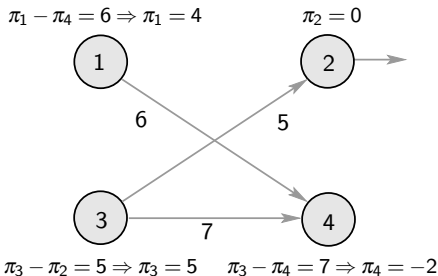


Figura 11: Cômputo do vetor π graficamente.

- A Figura 12 mostra o cálculo gráfico dos custos relativos para os arcos não básicos. Como todos os custos relativos são não negativos, tem-se a solução ótima $z^* = 6x_{14} + 5x_{32} + 7x_{34} = 30 + 40 + 14 = 84$.

Determinando os custos relativos IV

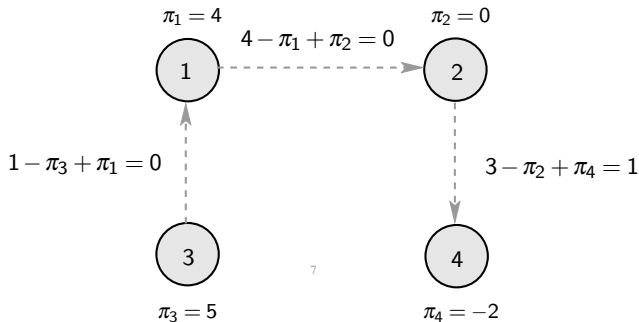


Figura 12: Cômputo dos custos relativos dos arcos não básicos.

Determinando os custos relativos V

- As variáveis π_i também podem ser interpretadas como as **variáveis duais** associadas a cada restrição (balanço do fluxo em cada nó) do problema primal dado em (1). Um fato importante é que o valor de π_i também pode ser interpretado como o custo de transportar uma unidade de fluxo do nó i até o nó raiz (respeitando as direções dos arcos). De modo simétrico $-\pi_i = \bar{\pi}_i$ pode ser visto como o custo para transportar uma unidade de fluxo do nó raiz até o nó i . Desse modo, se

$$\bar{\pi}_j > \bar{\pi}_i + c_{ij}$$

então é melhor (mais vantajoso) transportar uma unidade de fluxo do nó origem até o nó i e trazê-lo até o nó j por meio do arco (i, j) . Alguma semelhança com o conceito que serve de base para os algoritmos de caminho mínimo (Dijkstra e Bellman-Ford)?

Saída da base e teste de bloqueio I

- Caso o custo relativo associado a alguma variável não básica seja negativo, então esta variável é uma candidata a entrar na base, pois o aumento de fluxo no arco associado diminui o valor da função objetivo.
- Quando o arco não básico candidato entra na base, cria-se um ciclo (por que?) e um dos arcos básicos deve ser removido de modo a restaurar a árvore geradora enraizada. Essa remoção é realizada por meio do teste do bloqueio, como ilustra a Figura 13.

Saída da base e teste de bloqueio II

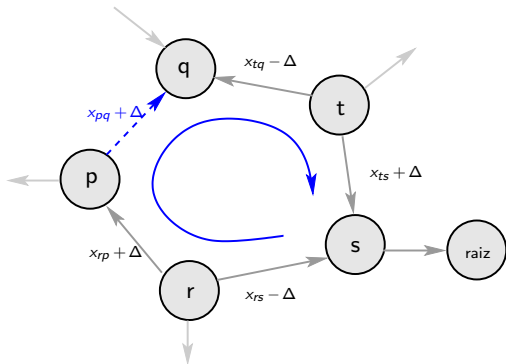


Figura 13: Fluxo adicional Δ no ciclo criado pela introdução do arco (p, q) .

Saída da base e teste de bloqueio III

- A partir do arco que entra na base (árvore), no caso (p, q) , introduz-se uma quantidade extra de fluxo Δ que irá percorrer o ciclo. Nos arcos com mesma direção de (p, q) soma-se Δ . Nos arcos com direção contrária, subtrai-se Δ (garantindo o equilíbrio e consequentemente a factibilidade).
- A primeira variável básica (caso exista) a anular seu fluxo deverá sair da base. Este teste é feito de forma similar ao teste de bloqueio do Simplex tradicional. Por exemplo, na Figura 13 considere os seguintes valores para as variáveis básicas do ciclo: $x_{tq} = 4$, $x_{ts} = 3$, $x_{rs} = 2$ e $x_{rp} = 5$. Assim tem-se

$$4 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$3 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = \infty$$

$$2 - \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = 2$$

$$5 + \Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta = \infty$$

Portanto x_{rs} define o bloqueio ($\Delta = 2$) e sai da base. Note que apenas os arcos com direção contrária ao arco que entra é que podem criar um bloqueio (se não

Algoritmo Simplex para redes I

Algorithm 1 Algoritmo Simplex para redes

- 1: Determinar uma solução básica inicial (árvore geradora enraizada) factível.
 - 2: Determinar os multiplicadores π e os custos relativos não básicos.
 - 3: **enquanto** houver arcos candidatos a entrar na base **faça**
 - 4: Selecionar um arco para entrar na base.
 - 5: **se** bloqueio é factível **então**
 - 6: Determinar o arco que sai da base.
 - 7: Atualizar os multiplicadores e custos relativos.
 - 8: **else**
 - 9: Pare, solução ilimitada.
 - 10: **fim se**
 - 11: **fim enquanto**
-

- A atualização realizada na linha 7 pode ser otimizada, notando que **parte** da árvore não será alterada por conta da remoção e inserção dos arcos.

Algoritmo Simplex para redes II

- Exemplo: Resolva o problema de fluxo de custo mínimo para o grafo apresentado na Figura 14.

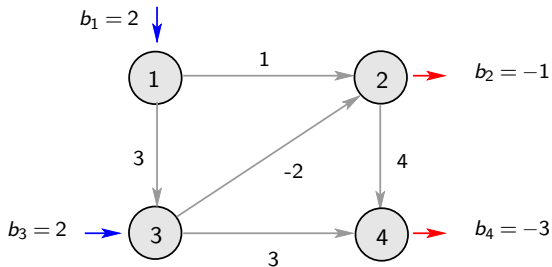


Figura 14: Grafo com 4 nós e 5 arestas.

Algoritmo Simplex para redes III

- Considere a árvore geradora enraizada dada na Figura 15, na qual os fluxos nos arcos básicos já estão determinados, isto é, $x^B = [x_{12} \ x_{13} \ x_{34} \ x_{ar}]^T = [1 \ 1 \ 3 \ 0]^T$. O valor da função objetivo para essa base é $z = 13$.

Algoritmo Simplex para redes V

- A Figura 16 mostra o cômputo dos **multiplicadores** e dos **custos relativos** dos arcos não básicos x_{14} e x_{32} . O arco x_{14} tem um custo relativo negativo e portanto é um candidato a entrar na base.

Algoritmo Simplex para redes VII

■ A Figura 17 mostra o teste de bloqueio a partir do ciclo gerado pela introdução do arco x_{14} na árvore geradora. O arco x_{13} gera o bloqueio e sai da base. Os novos fluxos básicos são $x^B = [x_{12} \ x_{24} \ x_{34} \ x_{ar}]^T = [2 \ 1 \ 2 \ 0]^T$. O valor da função objetivo para essa base é $z = 12$.

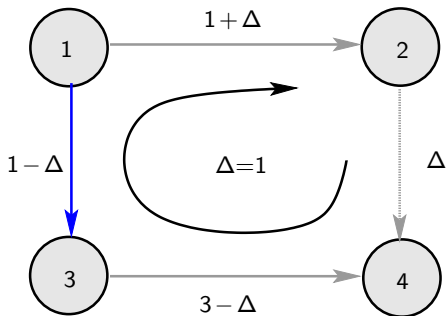


Figura 17: Teste de bloqueio.

Algoritmo Simplex para redes VIII

- Iteração 2: A Figura 18 mostra o cômputo dos multiplicadores e dos custos relativos dos arcos não básicos x_{13} e x_{32} . O arco x_{32} tem um custo relativo negativo e portanto é um candidato a entrar na base.

Algoritmo Simplex para redes IX

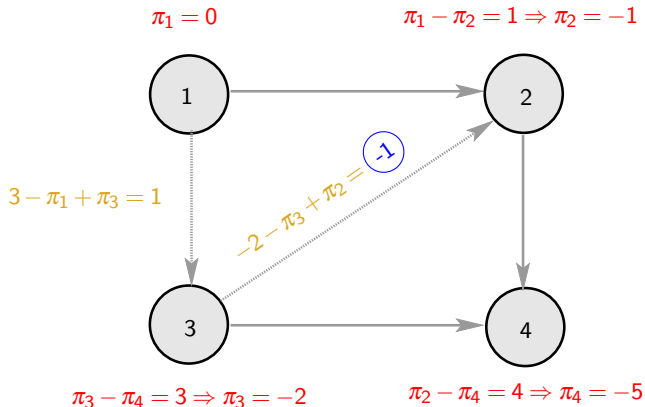


Figura 18: Cômputo dos **multiplicadores** e **custos relativos** não básicos.

Algoritmo Simplex para redes X

■ A Figura 19 mostra o teste de bloqueio a partir do ciclo gerado pela introdução do arco x_{32} na árvore geradora. O arco x_{34} gera o bloqueio e sai da base. Os novos fluxos básicos são $x^B = [x_{12} \ x_{24} \ x_{32} \ x_{ar}]^T = [2 \ 3 \ 2 \ 0]^T$. O valor da função objetivo para essa base é $z = 10$.

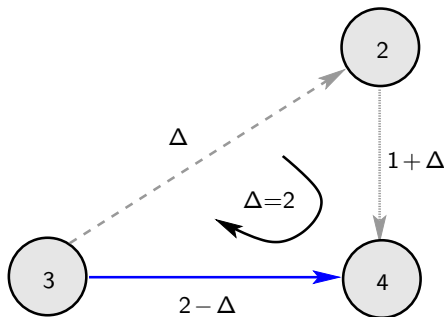


Figura 19: Teste de bloqueio.

Algoritmo Simplex para redes XI

- Iteração 3: A Figura 20 mostra o cômputo dos multiplicadores e dos custos relativos dos arcos não básicos x_{13} e x_{34} . Como todos os custos relativos são não negativos, tem-se a solução ótima ($z^* = 10$). Como uma das variáveis tem custo relativo nulo, pode-se considerar que existem outras soluções de mesmo custo.

Algoritmo Simplex para redes XII

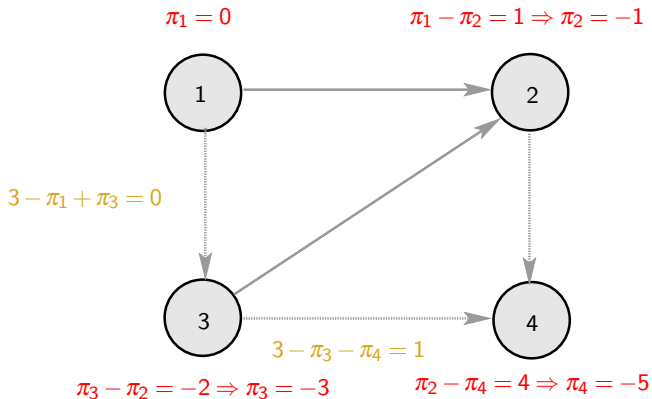


Figura 20: Cômputo dos **multiplicadores** e **custos relativos** não básicos.

Exercício

- Resolva o problema de fluxo de custo mínimo para o grafo apresentado na Figura 21.

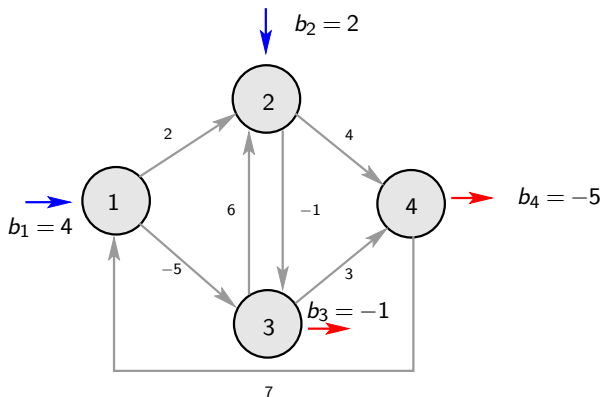


Figura 21: Grafo com 4 nós e 7 arestas.

Determinando uma solução básica inicial factível I

- Caso uma solução básica inicial factível não esteja disponível, o algoritmo Simplex não poderá ser iniciado. Nesse caso é necessário um procedimento sistemático para obter uma solução inicial factível.
- Seja o problema de fluxo de custo mínimo na forma padrão dada em (1) com $A = A_0$. Uma solução base inicial factível pode ser produzida seguindo os passos
 - Adicione n colunas artificiais em A_0 sendo n o número de nós do grafo, gerando a matriz $[A_0 \ D]$. A i -ésima coluna será o vetor $\pm e_i$, dependendo do sinal do b_i correspondente (mesmo sinal).
 - Adicione uma nova linha em $[A_0 \ D]$, formada pela soma das linhas e com a inversão do sinal.

Determinando uma solução básica inicial factível II

Seguindo esse procedimento, tem-se a nova restrição linear aumentada

$$\left[\begin{array}{c|cccc} & \pm 1 & & & \\ & & \pm 1 & & \\ A_0 & & & \dots & \\ & & & & \pm 1 \\ \hline -\mathbb{1}A_0 & \mp 1 & \mp 1 & \dots & \mp 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \mathbb{1}b \end{bmatrix}$$

sendo $\mathbb{1} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$.

- Note que a matriz aumentada preserva a estrutura de rede, pois todas as colunas possuem apenas elementos iguais a 0, -1 ou 1, e além disso cada coluna tem apenas um 1 e um -1 e o resto de zeros.
- Com relação à linha adicional, ela pode ser vista como um nó adicional no grafo. Note que existem n novos arcos, cada um começando no nó adicional e terminando nos nós existentes (o grafo continua conexo). Finalmente, adicionado a raiz nesse nó adicional, tem-se que a nova matriz é de rank completo. Assim, a

Determinando uma solução básica inicial factível III

árvore geradora inicial pode ser construída com os n arcos artificiais mais o arco raiz.

- Considere o grafo mostrado na Figura 21. Aplicando o procedimento apresentado, obtém-se o grafo mostrado na Figura 22. O método da fase I ou do big-M podem ser aplicados para encontrar uma solução básica inicial composta apenas de arcos originais.

Determinando uma solução básica inicial factível IV

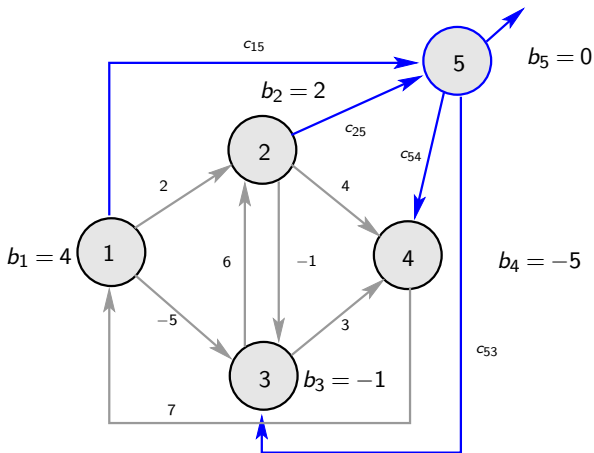


Figura 22: Grafo com nó e arcos artificiais (em azul).

Método da Fase I

■ Para aplicar o método da fase I, os custos associados aos arcos artificiais assumem valores unitários e os custos dos arcos originais são zerados. Na sequência aplica-se o método Simplex para redes até que todos os arcos artificiais saiam da base. Para o exemplo anterior, o grafo preparado para a fase I é mostrado na Figura 23.

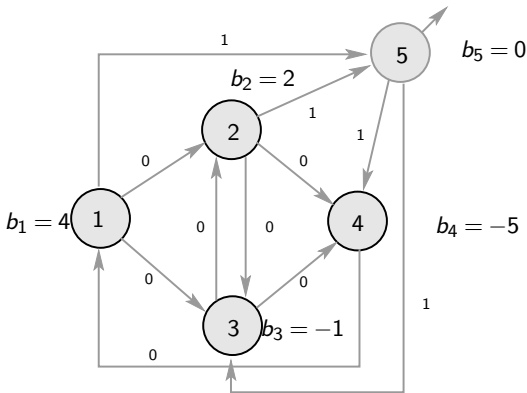


Figura 23: Grafo preparado para a fase I

Método do big-M

- A aplicação do método do big-M é similar ao método da fase I, apenas atribuindo um custo muito alto, M , aos arcos artificiais e conservando-se os custos originais nos outros arcos, como mostra a Figura 25. A árvore geradora inicial é a mesma da Figura 24.

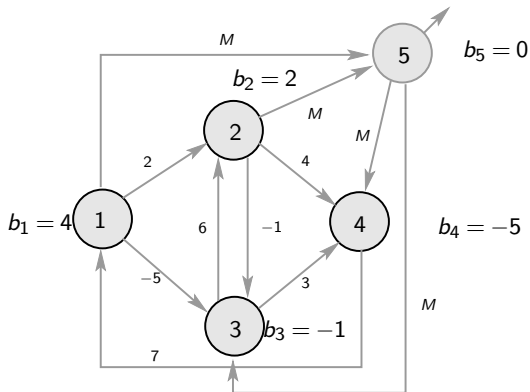


Figura 25: Grafo preparado para o big-M.

Variáveis canalizadas

- Até este ponto foi tratado o caso de arcos não capacitados e com limite inferior nulo. Contudo, podemos adaptar o algoritmo sem grandes dificuldades para tratar o caso mais geral

$$\text{PL canalizado: } \begin{cases} \min & z = c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & \ell \leq x \leq L \end{cases} \quad (4)$$

A Figura 26 mostra um grafo com arestas canalizadas e a notação (ℓ, L, c) indica o limite inferior, superior e custo, respectivamente, para cada arco.

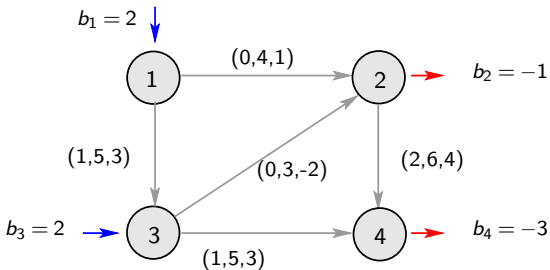


Figura 26: Grafo com 4 nós e 5 arestas canalizadas.

Otimalidade

- A condição de detecção de otimalidade a ser atendida no caso canalizado é

$$\text{Otimalidade: } \begin{cases} \hat{c}_{ij} \geq 0 & \text{se } x_{ij} = \ell_{ij} \\ \hat{c}_{ij} \leq 0 & \text{se } x_{ij} = L_{ij} \end{cases} \quad \forall x_{ij} \text{ não básico}$$

O grafo da Figura 27 mostra um conjunto de arcos não básicos atendendo o critério de otimalidade.

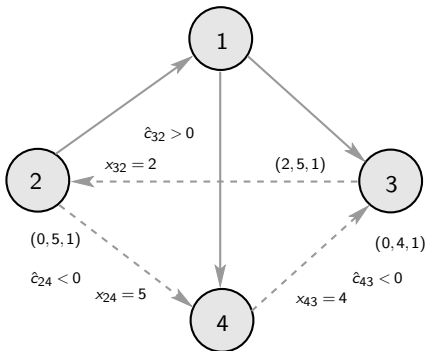


Figura 27: Grafo os arcos não básicos atendendo a otimalidade.

Cálculo do fluxo de bloqueio

- Duas situações precisam ser analisadas: se o arco que entra está com fluxo no limite inferior (a) ou no limite superior (b). A situação (a) é ilustrada na Figura 28.

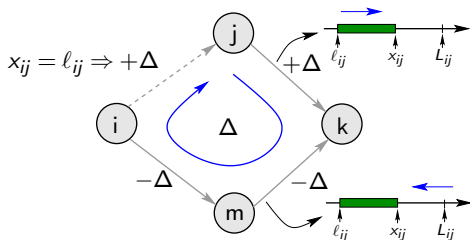


Figura 28: Arco não básico x_{ij} entrando com fluxo no mínimo.

Cálculo do fluxo de bloqueio

- A situação (b) é ilustrada na Figura 29

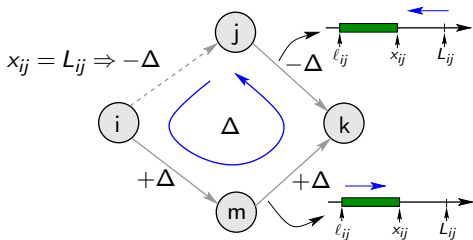


Figura 29: Arco não básico x_{ij} entrando com fluxo no máximo.

- Em ambos os casos, o valor de Δ pode ser computado da seguinte forma

$$\Delta = \min(\Delta_{ij}), \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} L_{ij} - l_{ij} & \text{para } x_{ij} \text{ não básico} \\ L_{ij} - x_{ij} & \text{para } x_{ij} \text{ básico no mesmo sentido} \\ x_{ij} - l_{ij} & \text{para } x_{ij} \text{ básico no sentido contrário} \end{cases}$$

Solução básica inicial factível

■ Para o problema com variáveis canalizadas, caso os limites inferiores de todos os arcos sejam nulos, então aplica-se o mesmo procedimento do caso não canalizado. Caso contrário pode-se utilizar o seguinte procedimento

- Para cada nó k do grafo, calcular

$$f_k = b_k + \sum_{(i,k) \in \mathcal{A}} \ell_{ik} - \sum_{(k,j) \in \mathcal{A}} \ell_{kj}$$

- Para cada nó k do grafo
 - Se $f_k > 0$ criar um arco artificial de k para $(n+1)$ com custo M grande e fluxo f_k .
 - Se $f_k < 0$ criar um arco artificial de $(n+1)$ para k com custo M grande e fluxo $-f_k$.
 - Se $f_k = 0$ criar um arco artificial entre $(n+1)$ e k (direção arbitrária) com custo M grande e fluxo f_k .
- Fazer, para todos os arcos do grafo original $x_{ij} = \ell_{ij}$.
- Otimizar.

Exemplo

- Considere o grafo apresentado na Figura 30, no qual existem arcos com limite inferior maior que zero (arcos (1,2) e (2,3)).

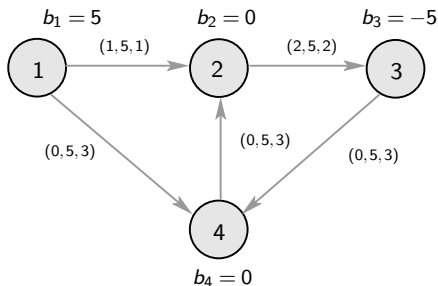


Figura 30: Problema canalizado em que existem arcos com $\ell_{ij} > 0$.

Calculando os coeficientes f_k , tem-se

$$\begin{aligned} f_1 &= 5 - 1 - 0 &= 4 & \quad f_3 &= -5 + 2 - 0 &= -3 \\ f_2 &= 0 + 1 + 0 - 2 &= -1 & \quad f_4 &= 0 + 0 - 0 &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo

- A Figura 32 mostra o cálculo dos potenciais e dos custos relativos não básicos. O menor custo relativo (em módulo) é $\hat{c}_{12} = 1 - 2M$ e portanto $(1,2)$ entra na base.

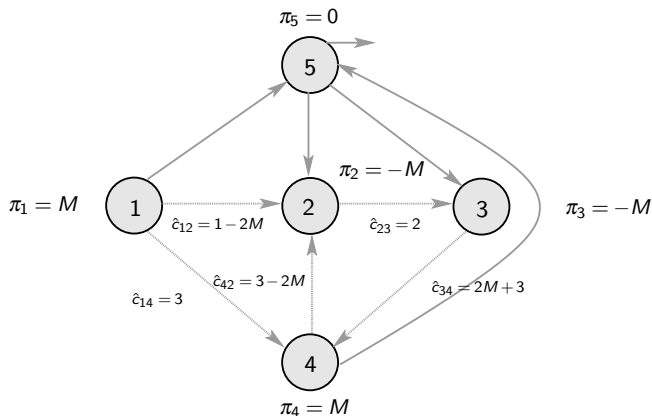


Figura 32: Cômputo dos potenciais e custos relativos não básicos.

Exemplo

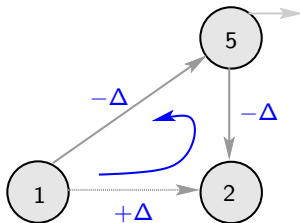


Figura 33: Teste de bloqueio.

$$\Delta = \min(\Delta_{12}, \Delta_{15}, \Delta_{52}), \quad \begin{aligned} \Delta_{12} &= L_{12} - l_{12} = 5 - 1 = 4 \\ \Delta_{15} &= x_{15} - l_{15} = 4 - 0 = 4 \\ \Delta_{52} &= x_{52} - l_{52} = 1 - 0 = 1 \end{aligned} \Rightarrow \Delta = 1$$

Fluxos atualizados: $x_{12} = 2$, $x_{15} = 3$ e $x_{52} = 0$ (sai da base).

Exemplo

■ A Figura 34 apresenta os novos potenciais e os custos relativos não básicos atualizados. Repete-se o procedimento até todos os arcos artificiais terem saído da base com exceção de um, que deverá ter fluxo nulo (se não tiver o problema original é infactível).

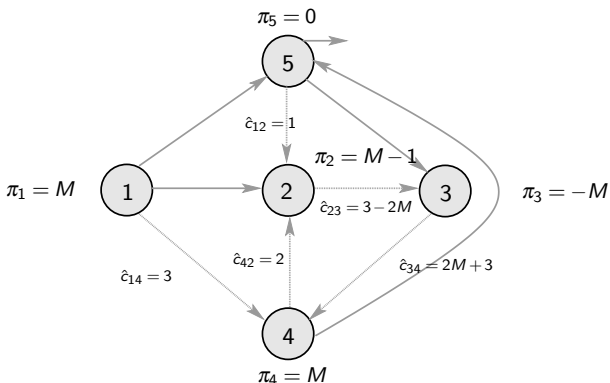


Figura 34: Cômputo dos potenciais e custos relativos não básicos.

Problema do caminho mínimo

- O problema do caminho mínimo investigado em aulas anteriores pode ser modelado como um caso particular do problema de fluxo de custo mínimo:
 - Apenas um nó de fornecimento (nó origem) com $b_s = n - 1$.
 - Todos os demais nós são de demanda unitária ($b_i = -1$).
 - Os arcos são não capacitados ($L_{ij} = \infty$)

Matematicamente tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} \\ s.a \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = \begin{cases} n-1 & \text{se } i \text{ é a origem} \\ -1 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{array} \right.$$

Terminada a execução do Simplex para redes, tem-se a árvore de caminhos mínimos do nó origem para todos os outros nós. Os custos dos caminhos são dados por $-\pi_i$ (potenciais com sinal trocado).

Problema do fluxo máximo I

- Seja um grafo $G(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ com arcos cujas capacidades de fluxo são limitadas superiormente $L_{ij} \leq \infty$, e dois nós especiais s e d (origem e destino respectivamente). O **problema do fluxo máximo** consiste em determinar a máxima quantidade de fluxo que pode partir de s e chegar em d respeitando as capacidades dos arcos.

Matematicamente temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_{sd} \\ \text{s.a} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} x_{ij} - \sum_{(k,i) \in \mathcal{A}} x_{ki} = \begin{cases} x_{sd} & \text{se } i \text{ é a origem (s)} \\ 0 & \text{se } i \text{ é nó de passagem} \\ -x_{sd} & \text{se } i \text{ é o destino (d)} \end{cases} \\ 0 \leq x_{ij} \leq L_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathcal{A} \end{array} \right.$$

sendo x_{sd} o fluxo entre a origem e o destino, que neste modelo pode ser interpretado como um arco ligando s e d com capacidade ilimitada.

- Exemplos de aplicações: Maximizar:

Problema do fluxo máximo III

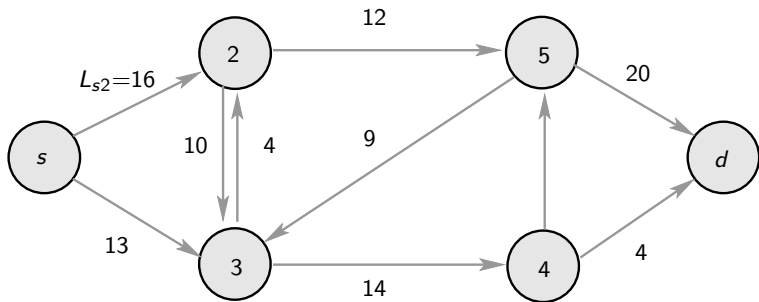


Figura 35: Grafo com os limitantes superiores dos fluxos nos arcos.

Problema do fluxo máximo IV

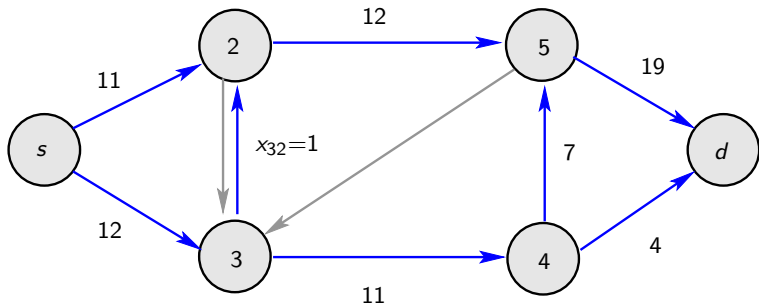


Figura 36: Solução do problema de fluxo máximo para o grafo da Figura 35. Nesse caso, $x_{s2} + x_{s3} = x_{5d} + x_{4d} = 23$.

