IA881 – Otimização Linear

Aula: Análise de Sensibilidade

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2021

Tópicos

Introdução

- Na maioria dos problemas práticos os dados utilizados para formular o problema matematicamente nem sempre são precisamente conhecidos, isto é, estão sujeitos a incertezas. Neste cenário é interessante desenvolver técnicas de análise das soluções ótimas quando algum parâmetro variar, sem precisar resolver o problema novamente desde o início.

- Esta aula apresenta técnicas de análise de sensibilidade de soluções ótimas para problemas de programação linear.

- Considere o problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\ a \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- Suponha que o método Simplex encontrou uma base ótima **B**. Utilizando as condições de otimalidade primal e dual, o objetivo é encontrar uma nova solução ótima se algum dado do problema variar (sem resolver um novo problema desde o início).

Variações Investigadas

- As seguintes variações são consideradas nesta aula:
  - Mudança no vetor de custo $\mathbf{c}$.
  - Mudança no vetor do lado direito $\mathbf{b}$.
  - Mudança na matriz de restrição $\mathbf{A}$.
  - Adição de uma nova atividade.
  - Adição de uma nova restrição.

Mudanças no vetor de custo $\mathbf{c}$ - $\mathbf{x}_k$ não Básica

- Dada uma solução básica factível ótima, considere que um ou mais coeficientes de custo das variáveis são modificados de c_k para c'_k. O efeito dessas mudanças no *tableau* final ocorre na linha do custo. Portanto, a factibilidade dual pode ser perdida. Dois casos são analisados:

- Caso I: $\mathbf{x}_k$ é não básico: $\mathbf{c}_B$ não é afetado, e portanto, $z_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ não é modificado para todo j. Assim, $z_k - c_k$ é substituído por $z_k - \bar{c}_k$. Se $z_k - \bar{c}_k = (z_k - c_k) + (c_k - \bar{c}_k)$ é positivo, então x_k entra na base e o método Simplex continua iterando. Caso contrário a solução anterior continua ótima frente ao novo valor $\bar{c}_k$.

$\mathbf{x}_k$ é Básica

■ Caso II: $\mathbf{x}_k$ é básico: Por exemplo, seja $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{B_t}$. Nesse caso c_{B_t} é substituído por $\bar{c}_{B_t}$. Considerando $\bar{z}_j$ como o novo valor de z_j, então $\bar{z}_j - c_j$ é calculado como segue:

$$\begin{aligned}\bar{z}_j - c_j =& \bar{\mathbf{c}}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j - c_j = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j) + (0, 0, \ldots, \bar{c}_{B_t} - c_{B_t}, 0, \ldots, 0)^T \mathbf{y}_j \\ =& (z_j - c_j) + (\bar{c}_{B_t} - c_{B_t}) y_{tj}, \ \forall j\end{aligned}$$

Em particular, para $j = k$, $z_k - c_k = 0$ e $y_{tk} = 1$ e portanto, $\bar{z}_k - c_k = \bar{c}_k - c_k$. Como esperado $\bar{z}_k - \bar{c}_k$ ainda é igual a zero. Portanto, a linha do custo pode ser atualizada adicionando a mudança líquida no custo de $x_{B_t} = x_k$ vezes a linha t do último *tableau*, na linha do custo original. Então, $\bar{z}_k - c_k$ é atualizado para $\bar{z}_k - \bar{c}_k = 0$. O novo valor da função objetivo $\bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\bar{c}_{B_t} - c_{B_t}) \bar{b}_t$ é obtido durante o processo.

Exemplo

- Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -2x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 3
\end{aligned}
$$

O *tableau* ótimo é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

Exemplo – $\mathbf{x}_k$ é Não Básico

- **Variação 1**: $c_2 = 1$ é substituído por -3. Como x_2 é não básica, então $z_2 - \bar{c}_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - \bar{c}_2) = -3 + 4 = 1$, e todos os outros $z_j - c_j$ não são afetados. Assim, x_2 entra na base no seguinte *tableau*:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	1	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

Continua-se a execução do método Simplex.

Exemplo – $\mathbf{x}_k$ é Básico

- **Variação 2**: $c_1 = -2$ é substituído por 0. Como x_1 é básica, então a nova linha do custo, com exceção de $z_1 - c_1$, é obtida multiplicando a linha associada a x_1 pela mudança líquida em c_1 (isto é, $0 - (-2) = 2$), e adicionando à linha do custo anterior. O novo valor de $z_1 - c_1$ permanece nulo. Note que o novo valor de $z_3 - c_3$ agora é positivo e portanto x_3 entra na base no seguinte *tableau*:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	-1	1	0	0	0
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

Continua-se a execução do método Simplex.

Mudanças no vetor **b**

- Se o vetor do lado direito muda de $\mathbf{b}$ para $\hat{\mathbf{b}}$, então $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ muda para $\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}}$. Em princípio, o cálculo desse último pode ser feito diretamente. Contudo, caso $\mathbf{B}^{-1}$ esteja disponível no *tableau* (quando $\mathbf{N}$ contém uma matriz identidade originalmente) o cálculo de $\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}}$ pode ser simplificado. Note que $\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})$. Portanto,

$$\mathbf{B}^{-1}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j(\hat{b}_j - b_j) \Rightarrow \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{y}_j(\hat{b}_j - b_j)$$

Uma vez que $z_j - c_j \leq 0$ para todas as variáveis não básicas (problema de minimização), a única possibilidade de perda de otimalidade é o surgimento de algum elemento negativo em $\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}}$ (infactibilidade). Nesse caso o método Dual Simplex pode ser aplicado para restaurar a factibilidade primal. Se $\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} \geq 0$, então a base corrente continua ótima e o valor da função objetivo é $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}}$.

Exemplo

- Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, cujo *tableau* ótimo é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

Suponha que o vetor do lado direito seja modificado para $\hat{\mathbf{b}} = [3,4]^T$ (originalmente era $\mathbf{b} = [6,4]^T$). Observe que $\mathbf{B}^{-1}$ está disponível no *tableau*, pois tínhamos uma matriz identidade abaixo das variáveis x_4 e x_5. Portanto,

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{b}}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (3 - (6)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (4 - (4)) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Alterações nas colunas da matriz **A**

- Nesta seção discutem-se mudanças em alguns elementos da matriz de restrição **A**. Mudanças envolvendo colunas não básicas e básicas são discutidas separadamente.

- Caso I: Mudanças em colunas não básicas: Suponha que uma coluna não básica $\mathbf{a}_j$ é modificada para $\bar{\mathbf{a}}_j$. Então a nova coluna atualizada é dada por $\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_j$ e $\bar{z}_j - c_j = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_j - c_j$. Se $\bar{z}_j - c_j \leq 0$, então a solução anterior continua ótima. Caso contrário o método Simplex é continuado após a coluna j do *tableau* ser atualizada, fazendo que com a variável x_j seja candidata a entrar na base.

- Caso II: Mudanças em colunas básicas: Suponha que uma coluna básica $\mathbf{a}_j$ é modificada para $\bar{\mathbf{a}}_j$. Nesse caso é possível que o conjunto de vetores básicos não mais formem uma base após a modificação. Mesmo que isso não aconteça, note que uma mudança em uma coluna básica produz uma mudança em $\mathbf{B}^{-1}$, e portanto todas as colunas podem ser afetadas.

Mudanças em Colunas Básicas

- O tratamento deste caso pode ser feito em dois passos. (1) Adicione uma nova variável (atividade) $\bar{x}_j$ ao problema, associada à coluna $\bar{a}_j$ (e coeficiente c_j); (2) Elimine a variável x_j do problema.

- O primeiro passo é realizado calculando $\bar{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_j$ e $\bar{z}_j - c_j = \bar{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_j - c_j$ (**B** é a base corrente), fornecendo a coluna para $\bar{x}_j$.

Caso $\bar{y}_{jj}$ na linha correspondente a x_j na coluna $\bar{x}_j$ não for nulo, então a coluna x_j pode ser substituída por $\bar{x}_j$ na base **B**, e a variável x_j pode ser eliminada do problema. Essa operação pode produzir a perda da factibilidade primal, dual ou ambas. Se apenas a primal é perdida, pode-se prosseguir com o método Dual Simplex. Se apenas a dual é perdida, prossegue-se com o método Simplex normalmente. Caso as duas sejam perdidas, introduzem-se variáveis artificiais e utiliza-se o método das duas fases ou Big-M.

Por outro lado, se $\bar{y}_{jj} = 0$ não é possível formar uma nova base com a coluna $\bar{x}_j$. Nesse caso, uma maneira de eliminar x_j da base é tratá-la como uma variável artificial e tentar eliminá-la com o método das duas fases ou Big-M.

Exemplo: Alteração em Coluna Não Básica

- Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, cujo *tableau* ótimo é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

Suponha que $\mathbf{a}_2$ seja modificada de $[1,2]^T$ para $[2,5]^T$. Então,

$$\bar{\mathbf{y}}_2 = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_2 - c_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} - 1 = -5$$

Assim, o *tableau* atual continua ótimo com a coluna x_2 substituída por $[-5,2,7]^T$.

Exemplo: Alteração em Coluna Básica

- Considere uma outra modificação: $\mathbf{a}_1$ é modificada de $[1,-1]^T$ para $[0,-1]^T$. Então,

$$\bar{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - (-2) = 2$$

Nesta situação, o elemento de $\bar{y}_1$ correspondente à linha de x_1 (primeira linha) é nulo. Portanto, $\bar{y}_1$ não pode substituir a coluna de x_1 na base. Adicionando a coluna $[2,0,-1]^T$ de $\bar{x}_1$ e tornando x_1 uma variável artificial na base como uma penalização M na função objetivo, tem-se o *tableau*

	x_1	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	$-M$	2	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	0	1	1	1	0	6
x_5	0	-1	3	1	1	1	10

Após realizar um pivotamento inicial para zerar $z_1 - c_1$, prossegue-se com o método Big-M.

Exemplo: Alteração em Coluna Básica

- Considere uma última modificação: $\mathbf{a}_1$ é modificada de $[1,-1]^T$ para $[3,6]^T$. Então,

$$\bar{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\bar{\mathbf{a}}_1 - c_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} - (-2) = -4$$

Nesse caso o elemento $\bar{y}_1$ correspondente à linha de x_1 é não nulo, e assim inclui-se a coluna de $\bar{x}_1$ $[-4,3,9]^T$ no *tableau*, levando a

	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	-4	-3	-1	-2	0	-12
x_1	3	1	1	1	0	6
x_5	9	3	1	1	1	10

Na sequência realiza-se um pivotamento sobre 3 e prossegue-se com o método Simplex.

Adicionando Uma Nova Variável (Atividade)

- Suponha que uma nova variável x_{n+1} (atividade), associada a c_{n+1} e coluna $\mathbf{a}_{n+1}$ é considerada para ser incluída no modelo. Sem resolver o problema, é possível saber se a inclusão de x_{n+1} no problema é vantajosa. Primeiro calcula-se $z_{n+1} - c_{n+1}$. Se $z_{n+1} - c_{n+1} \leq 0$ (problema de minimização), então $x^{\star}_{n+1} = 0$ e a solução corrente é ótima. Caso contrário, se $z_{n+1} - c_{n+1} > 0$, então x_{n+1} é introduzida na base e prossegue-se com a execução do método Simplex para encontrar a nova solução ótima.

Exemplo

- Exemplo: No exemplo anterior, deseja-se encontrar a nova solução ótima se a variável $x_6 \geq 0$, associada a $c_6 = 1$ e $\mathbf{a}_6 = [-1, 2]^T$, for introduzida. Calculando $z_6 - c_6$ e $\mathbf{y}_6$, tem-se

$$
\begin{aligned}
z_6 - c_6 &= \mathbf{w}^T \mathbf{a}_6 - c_6 \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = 1 \\
\mathbf{y}_6 &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Portanto, x_6 é introduzida na base, com pivotamento aplicado na linha de x_5 e coluna de x_6 no *tableau* apresentado a seguir.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	−3	−1	−2	0	1	−12
x_1	1	1	1	1	0	−1	6
x_5	0	3	1	1	1	1	10

Continua-se com o método Simplex.

Introduzindo Uma Nova Restrição

- Suponha que uma nova restrição é incorporada no modelo. Se a solução ótima do problema original satisfaz essa restrição, então a mesma continua ótima no problema modificado (Figura 1 (a)). Caso contrário o ponto ótimo original não estará mais presente na região factível (Figura 1 (b)) devido à nova restrição, e aplica-se o método Dual Simplex para tentar encontrar uma nova solução ótima.

Interpretação Gráfica

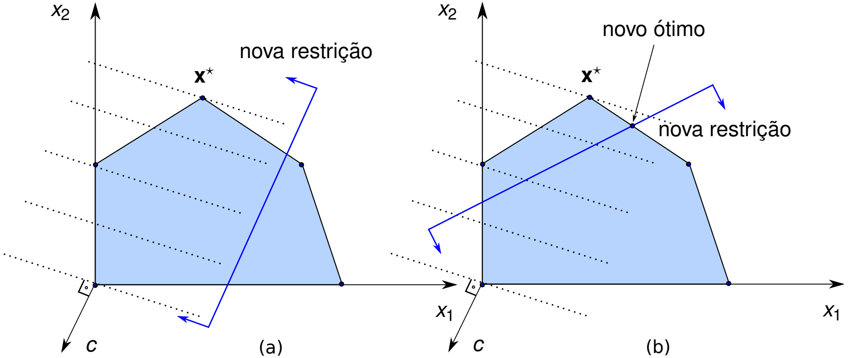

Figura 1: Incluindo uma nova restrição.

Nova Restrição - Tratamento Algébrico

- Algebricamente, para uma dada solução básica ótima associada a uma base **B**, tem-se o seguinte sistema canônico de equações (ver aula Método Simplex)

$$\begin{aligned} z + (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T)\mathbf{x}_N &= \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{2}$$

A nova restrição a ser incluída no problema, $\mathbf{a}^{m+1}\mathbf{x} \leq b_{m+1}$, pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{a}_B^{m+1}\mathbf{x}_B + \mathbf{a}_N^{m+1}\mathbf{x}_N + x_{n+1} = b_{m+1}, \quad \mathbf{a}^{m+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_B^{m+1} \\ \mathbf{a}_N^{m+1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

sendo x_{n+1} uma variável de folga não negativa. Multiplicando a equação (2) por $\mathbf{a}_B^{m+1}$ e subtraindo da equação (3), tem-se o sistema de equações apresentado na sequência.

Nova Restrição - Tratamento Algébrico

$$z + (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_N^T)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_B + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\left(\mathbf{a}_N^{m+1} - \mathbf{a}_B^{m+1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x}_N + x_{n+1} = b_{m+1} - \mathbf{a}_B^{m+1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Esse sistema de equações fornece uma nova solução básica, e a única possibilidade de violação da otimalidade com a incorporação da nova restrição é o sinal de $b_{m+1} - \mathbf{a}_B^{m+1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. Portanto, se $b_{m+1} - \mathbf{a}_B^{m+1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$, então a solução corrente é ótima. Caso contrário então o método Dual Simplex pode ser utilizado para restaurar a factibilidade primal, e portanto a otimalidade.

Exemplo

- Exemplo: Considere novamente o exemplo anterior, cujo *tableau* ótimo é dado por

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	6
x_5	0	3	1	1	1	10

O objetivo é introduzir a restrição $-x_1 + 2x_3 \geq 2$. Claramente, o ponto ótimo $[x_1, x_2, x_3]^T = [6, 0, 0]^T$ não satisfaz essa restrição. Rescrevendo a restrição na forma $x_1 - 2x_3 + x_6 = -2$ com $x_6 \geq 0$ e introduzindo no *tableau*, tem-se

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
x_6	1	0	-2	0	0	1	-2

Exemplo

Restaurando a coluna associada a x_1, tem-se

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	LD
z	0	-3	-1	-2	0	0	-12
x_1	1	1	1	1	0	0	6
x_5	0	3	1	1	1	0	10
x_6	0	-1	-3	-1	0	1	-8

Na sequência aplica-se o método Dual Simplex.