IA881 – Otimização Linear

Aula: Método Simplex Com Variáveis Canalizadas

Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2023

Tópicos

Variáveis Canalizadas

- Em muitos problemas práticos as variáveis de otimização são limitadas. Nesse caso, é necessário trabalhar com o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ s.\,a & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \ell \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{array} \tag{1}$$

sendo ℓ e $\mathbf{u}$ vetores que contém os limitantes inferiores e superiores de $\mathbf{x}$, respectivamente, com $u_j > \ell_j$, $j = 1, \ldots, n$.

- Uma solução imediata para tratar o problema é tratar as restrições $\ell \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ de modo convencional, isto é, inserindo variáveis de folga e de excesso. Por exemplo, podemos criar dois vetores de variáveis (não negativas) $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ e introduzir as restrições $\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 = \mathbf{u}$ e $\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = \ell$. O número de restrições sobe de m para $m + 2n$ e o número de variáveis sobe de n para $3n$. Claramente, tem-se um significativo aumento da complexidade do problema.

- Uma outra alternativa mais eficiente é adaptar o método Simplex para tratar a canalização sem inserir variáveis e restrições adicionais.

Soluções Básicas

- Considere o PL (1) com $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rank m. Uma solução $\bar{\mathbf{x}}$ para as equações $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é uma solução básica para o sistema se $\mathbf{A}$ pode ser participada na forma $[\mathbf{B}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, sendo que a matriz $\mathbf{B}$ tem rank m tal que com $\mathbf{x}$ particionado na forma $[\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_{N_1}^T, \mathbf{x}_{N_2}^T]^T$ tem-se

$$\bar{\mathbf{x}}_{N_1} = \ell_{N_1}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{N_2} = \mathbf{u}_{N_2}, \quad \bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\ell_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\mathbf{u}_{N_2}$$

Além disso, se $\ell_B \leq \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{u}_B$, então $\bar{\mathbf{x}}$ é uma solução básica factível. A matriz $\mathbf{B}$ é chamada de base, $\mathbf{x}_B$ são as variáveis básicas, e $\mathbf{x}_{N_1}$ e $\mathbf{x}_{N_2}$ são as variáveis não básicas em seus limites inferiores e superiores, respectivamente. Caso $\ell_B < \bar{\mathbf{x}} < \mathbf{u}_B$, $\bar{\mathbf{x}}$ é chamada de solução básica factível não degenerada. Caso contrário, é degenerada.

Exemplo

Exemplo

Encontre as soluções básicas factíveis associadas às restrições:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 5 \\
-x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
0 \leq x_1 &\leq 4 \\
-1 \leq x_2 &\leq 4
\end{aligned}
$$

Introduzindo variáveis de folga, tem-se

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
-x_1 + 2x_2 + x_4 &= 4 \\
0 \leq x_1 &\leq 4 \\
-1 \leq x_2 &\leq 4 \\
0 \leq x_3 &\leq \infty \\
0 \leq x_4 &\leq \infty
\end{aligned}
$$

Exemplo – Todas as Soluções Básicas Factíveis

- O objetivo é determinar todas a soluções básicas factíveis do problema. Uma maneira de realizar essa tarefa é extrair uma base das duas primeiras restrições, resolvendo as variáveis básicas em função das não básicas, e então fixar as não básicas em seus extremos. Por exemplo, considere $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$ como os vetores da base. Assim:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as duas primeiras restrições por $\mathbf{B}^{-1}$ e passando x_3 e x_4 para o lado direito, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 &= \quad 5 - x_1 - x_3 \\ x_4 &= \quad -6 + 3x_1 + 2x_3 \end{aligned}$$

Fixando x_1 em seus extremos e x_3 sem seu limite inferior, tem-se

- $[x_1, x_3]^T = [0, 0]^T \Rightarrow [x_2, x_4]^T = [5, -6]^T$. Como $x_4 < 0$, tem-se uma solução básica não factível.
- $[x_1, x_3]^T = [4, 0]^T \Rightarrow [x_2, x_4]^T = [1, 6]^T$. Tem-se uma solução básica factível.

As outras soluções podem ser encontradas de maneira similar, sendo $[2, 3, 0, 0]^T$, $[0, 2, 3, 0]^T$, $[4, 1, 0, 6]^T$, $[0, -1, 6, 6]^T$, $[4, -1, 2, 10]^T$.

Exemplo – Projeção das Soluções no Plano $x_1 \times x_2$

- Projetando esses pontos no espaço $x_1 \times x_2$, tem-se os vértices $v_1, \ldots, v_5$, como mostra a Figura 1.

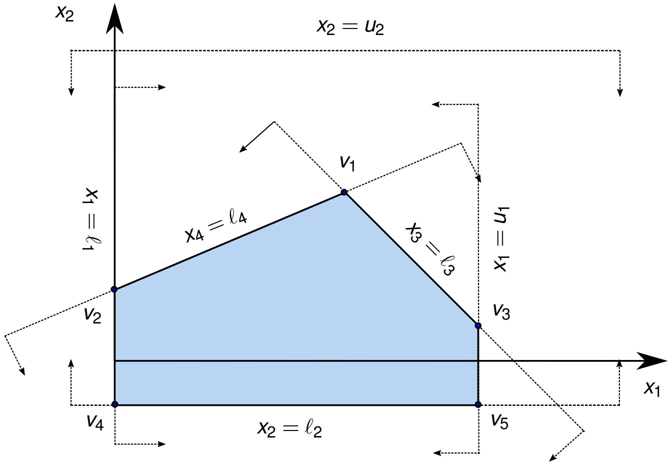

Figura 1: Soluções básicas factíveis.

Exemplo – Comentários Finais

- Note que cada ponto extremo é formado pela interseção de dois hiperplanos geradores LI neste espaço. Mais precisamente, $(x_3 = \ell_3, x_4 = \ell_4)$ fornece v_1, $(x_1 = \ell_1, x_4 = \ell_4)$ fornece v_2, $(x_1 = u_1, x_3 = \ell_3)$ fornece v_3, $(x_1 = \ell_1, x_2 = \ell_2)$ fornece v_4 e $(x_1 = u_1, x_2 = \ell_2)$ fornece v_5.

- Assim como visto no caso não canalizado, soluções básicas factíveis e pontos extremos coincidem.

Introdução

■ Assim como no caso não canalizado, sempre existe uma solução básica factível ótima se a região factível não for vazia e o ótimo for finito. Contudo, o número de soluções básicas factíveis é ainda maior no caso canalizado. De fato, esse número é limitado por

$$\binom{n}{m} 2^{n-m}$$

Note que para cada possível maneira de extrair uma base, existem 2^{n-m} maneiras de fixar as variáveis não básicas em seus limites inferior ou superior. Portanto, para caminhar entre soluções básicas factíveis, é necessário uma sistemática.

■ Suponha a existência de uma base $\mathbf{B}$ e a decomposição $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$. As variáveis básicas e a função objetivo podem ser decompostas na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_{N_2} && (2) \\ z &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_{N_1}^T\mathbf{x}_{N_1} + \mathbf{c}_{N_2}^T\mathbf{x}_{N_2} \\ &= \mathbf{c}_B^T\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_{N_1} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}_{N_2}\right) + \mathbf{c}_{N_1}^T\mathbf{x}_{N_1} + \mathbf{c}_{N_2}^T\mathbf{x}_{N_2} \\ &= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_{N_1}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1\right)\mathbf{x}_{N_1} + \left(\mathbf{c}_{N_2}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2\right)\mathbf{x}_{N_2} && (3) \end{aligned}$$

Novo *Tableau*

Suponha que é conhecida uma solução básica factível na qual $\mathbf{x}_{N_1} = \ell_{N_1}$, $\mathbf{x}_{N_2} = \mathbf{u}_{N_2}$, e $\ell_B \leq \mathbf{x}_B \leq \mathbf{u}_B$. Essa solução é representada pelo *tableau* dado a seguir. O lado direito (LD) fornece os valores de z e $\mathbf{x}_B$ (denotados por $\hat{z}$ e $\hat{\mathbf{b}}$) quando $\mathbf{x}_{N_1} = \ell_{N_1}$ e $\mathbf{x}_{N_2} = \mathbf{u}_{N_2}$ são substituídas nas equações (2) e (3).

	z	$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_{N_1}$	$\mathbf{x}_{N_2}$	LD
z	1	0	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1 - \mathbf{c}_{N_1}^T$	$\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2 - \mathbf{c}_{N_2}^T$	$\hat{z}$
$\mathbf{x}_B$	0	I_m	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2$	$\hat{\mathbf{b}}$

- Nesta etapa a análise consiste em tentar melhorar a função objetivo investigando a possibilidade de mudar as variáveis não básicas. Da equação (3) e notando que $\mathbf{c}_{N_1}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{c}_{N_2}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}_2$ fornecem os custos reduzidos $c_j - z_j$ das variáveis não básicas $\mathbf{x}_{N_1}$ (nos limites inferiores) e $\mathbf{x}_{N_2}$ (nos limites superiores), tem-se

$$z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j\in J_1}(z_j - c_j)x_j - \sum_{j\in J_2}(z_j - c_j)x_j \tag{4}$$

sendo J_1 (J_2) os índices das variáveis não básicas nos limites inferiores (superiores). Para $j \in J_1$, se $z_j - c_j > 0$, é vantajoso aumentar x_j de seu limite inferior ℓ_j.

Variável Não Básica Que Entra na Base

Similarmente, para $j \in J_2$, se $z_j - c_j < 0$, é vantajoso diminuir x_j de seu limite superior u_j. Assim como no método Simplex, modifica-se o valor de apenas uma variável não básica, enquanto todas as outras não básicas permanecem fixas (isso equivale a movimentar-se por uma aresta do conjunto poliedral). O índice k dessa variável não básica é determinado como explicado a seguir. Primeiro, examina-se

$$\max\left\{\max_{j \in J_1}(z_j - c_j), \max_{j \in J_2}(c_j - z_j)\right\}.$$

Se o resultado for positivo, então tome k como o índice para o qual o máximo foi atingido. Se $k \in J_1$, então x_k é aumentada a partir de seu valor atual ℓ_k, e se $k \in J_2$, então x_k é diminuída a partir de seu valor atual u_k. Se o máximo é não positivo, então $z_j - c_j \leq 0$ para todo $j \in J_1$ e $z_j - c_j \geq 0$ para todo $j \in J_2$. Da equação (4), conclui-se que a solução corrente é ótima.

- Os casos em que x_k é aumentada ou diminuída são discutidos em detalhes na sequência.

Variável Básica Atinge Seu Limite Inferior

- Seja $x_k = \ell_k + \Delta_k$, com Δ_k sendo o aumento em x_k. Substituindo $x_k = \ell_k + \Delta_k$ nas equações (2) e (4), tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ x_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \ell_k \end{bmatrix} + \Delta_k \begin{bmatrix} -\mathbf{y}_k \\ 1 \end{bmatrix} && (5) \\ z &= \hat{z} + \Delta_k[-(z_k - c_k)] && (6) \end{aligned}$$

Como $z_k - c_k > 0$, então de (6) é vantajoso aumentar Δ_k o máximo possível. Entretanto, o aumento de Δ_k altera os valores das variáveis básicas de acordo com (5). As possíveis situações de bloqueio são listadas a seguir.

1. Uma variável básica atinge seu limite inferior: Seja γ_1 o valor de Δ_k tal que uma variável básica atinge seu limite inferior. Da equação (5), tem-se $\ell_B \leq \mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_k\Delta_k \Rightarrow \mathbf{y}_k\Delta_k \leq \hat{\mathbf{b}} - \ell_B$. Se $\mathbf{y}_k \leq 0$, então Δ_k pode ser arbitrariamente grande sem violar essa desigualdade e portanto $\gamma_1 = \infty$ (nenhuma variável básica atinge seu limite inferior). Caso contrário, determina-se γ_1 pelo teste da mínima taxa:

$$\gamma_1 = \begin{cases} \min_{1\leq i\leq m}\left(\frac{\hat{b}_i - \ell_{B_i}}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0\right) = \frac{\hat{b}_r - \ell_{B_r}}{y_{rk}} & \text{se } \mathbf{y}_k \nleq 0 \\ \infty & \text{se } \mathbf{y}_k \leq 0 \end{cases}$$

Variável Básica Atinge Seu Limite Superior

A variável básica que atingi seu limite inferior é uma candidata para x_{B_r}.

2. Uma variável básica atinge seu limite superior: Seja γ_2 o valor de Δ_k tal que uma variável básica atinge seu limite superior. Da equação (5), tem-se $\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_k\Delta_k = \mathbf{x}_B \leq \mathbf{u}_B \Rightarrow -\mathbf{y}_k\Delta_k \leq \mathbf{u}_B - \hat{\mathbf{b}}$. Se $\mathbf{y}_k \geq 0$, então Δ_k pode ser arbitrariamente grande sem violar essa desigualdade e portanto $\gamma_2 = \infty$ (nenhuma variável básica atinge seu limite superior). Caso contrário, determina-se γ_2 pelo teste da mínima taxa:

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_{1\leq i\leq m}\left(\frac{u_{B_i}-\hat{b}_i}{-y_{ik}},\ y_{ik}<0\right) = \frac{u_{B_r}-\hat{b}_r}{-y_{rk}} & \text{se } \mathbf{y}_k \ngeq 0 \\ \infty & \text{se } \mathbf{y}_k \geq 0 \end{cases}$$

A variável básica que atingi seu limite superior é uma candidata para x_{B_r}.

A Própria Variável Não Básica Atinge Seu Limite Superior

3. A própria variável x_k atinge seu limite superior: O valor de Δ_k tal que x_k atinge seu limite superior é obviamente $u_k - \ell_k$.

Os três casos listados fornecem o maior valor de Δ_k ante que aconteça algum bloqueio (por alguma variável básica por pela própria x_k). Claramente, Δ_k será o menor valor de todos, isto é,

$$\Delta_k = \min(\gamma_1, \gamma_2, u_k - \ell_k) \tag{7}$$

Se $\Delta_k = \infty$, então um aumento em x_k nunca é bloqueado, e pela equação (6), o valor da função objetivo é ilimitado. Por outro lado, se Δ_k é finito, uma nova solução básica factível é obtida na qual $x_k = \ell_k + \Delta_k$ e as variáveis básicas são modificadas de acordo com (5).

Atualização do *Tableau*

- **Atualização do *tableau***: Se $\Delta_k = u_k - \ell_k$, x_k continua não básica (mas agora no limite superior) e apenas o LD é atualizado: $\hat{z} = \hat{z} - (z_k - c_k)\Delta_k$ e $\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} - \mathbf{y}_k\Delta_k$. Por outro lado, se Δ_k é dado por γ_1 ou γ_2, então x_k entra na base e x_{B_r} sai da base, sendo que o índice r é determinado pelas respectivas expressões de cálculo de γ_1 e γ_2.

- Com exceção da coluna LD, o resto do *tableau* é atualizado pelo pivotamento em torno de y_{rk}, que pode ser positivo ou negativo. A coluna LD é atualizada de acordo com as equações (6) e (5), com exceção da r-ésima componente do novo vetor $\hat{\mathbf{b}}$, que é substituída por $\ell_k + \Delta_k$ para refletir o valor de x_k, que acabou de entrar na base.

Procedimentos

- Os procedimentos são muito similares ao caso anterior. Portanto, apresenta-se os cálculos de forma resumida. Neste caso $z_k - c_k < 0$ e $x_k = u_k - \Delta_k$, sendo que $\Delta_k \geq 0$ indica uma diminuição em x_k. Observando as equações (2) e (4), tem-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ u_k \end{bmatrix} + \Delta_k \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ -1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$z = \hat{z} + \Delta_k (z_k - c_k) \tag{9}$$

O maior valor de Δ_k é dado pela equação (7) e γ_1 e γ_2 são computados de acordo com

$$\gamma_1 = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{\hat{b}_i - \ell_{B_i}}{-y_{ik}},\ y_{ik} < 0 \right) = \frac{\hat{b}_r - \ell_{B_r}}{-y_{rk}} & \text{se } \mathbf{y}_k \not\geq 0 \\ \infty & \text{se } \mathbf{y}_k \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_{1 \leq i \leq m} \left(\frac{u_{B_i} - \hat{b}_i}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0 \right) = \frac{u_{B_r} - \hat{b}_r}{y_{rk}} & \text{se } \mathbf{y}_k \not\leq 0 \\ \infty & \text{se } \mathbf{y}_k \leq 0 \end{cases}$$

Se $\Delta_k = \infty$, então a diminuição em x_k nunca é bloqueada, e pela equação (9), o valor da função objetivo é ilimitado.

Atualização do *Tableau*

Por outro lado, se Δ_k é finito, uma nova solução básica factível é obtida na qual $x_k = u_k - \Delta_k$ e as variáveis básicas são modificadas de acordo com (8).

- **Atualização do *tableau***: Se $\Delta_k = u_k - \ell_k$, x_k continua não básica (mas agora no limite inferior) e apenas o LD é atualizado de acordo com as equações (9) e (8). Se Δ_k é dado por γ_1 ou γ_2, então x_k entra na base e x_{B_r} sai da base, sendo que o índice r é determinado pelas respectivas expressões de cálculo de γ_1 e γ_2. Com exceção da coluna LD, o resto do *tableau* é atualizado pelo pivotamento em torno de y_{rk}, que pode ser positivo ou negativo. A coluna LD é atualizada de acordo com as equações (9) e (8), com exceção da r-ésima componente do novo vetor $\hat{\mathbf{b}}$, que é substituída por $u_k - \Delta_k$ para refletir o valor de x_k, que acabou de entrar na base.

Exemplo I

Exemplo

Resolva o PL canalizado apresentado a seguir

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -2x_1 - 4x_2 - x_3 \\
\text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \le 4 \\
& 0 \le x_1 \le 4 \\
& 0 \le x_2 \le 6 \\
& 1 \le x_3 \le 4
\end{aligned}
$$

Primeiro introduz-se as variáveis de folga x_4 e x_5 (limitadas entre 0 e ∞). Toma-se x_4 e x_5 como básicas e x_1, x_2 e x_3 como não básicas em seus limites inferiores. Nesse caso a função objetivo vale -1 e as variáveis básicas assumem os valores $x_4 = 10 - 1 = 9$ e $x_5 = 4 + 1 = 5$.

Iteração 1

Exemplo II

$$
\begin{array}{c|ccccc|c|}
 & \ell & \ell & \ell & & & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
z & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
x_4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\
x_5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

O maior valor de $z_j - c_j$ para as variáveis não básicas no mínimo é 4, correspondendo a x_2. Portanto, $x_k = x_2$ é aumentado. Então $\mathbf{y}_2 = [1, 1]^T$ e Δ_2 é dado por $\min(\gamma_1, \gamma_2, u_2 - \ell_2) = \min(\gamma_1, \gamma_2, 6)$. Como $\mathbf{y}_2 \geq 0$, $\gamma_2 = \infty$ e as variáveis básicas poderiam aumentar indefinidamente. Computando γ_1, tem-se

$$\gamma_1 = \min\left(\frac{9-0}{1}, \frac{5-0}{1}\right) = 5$$

correspondendo a x_5, isto é, $r = 2$. Isso significa que Δ_2 poderia aumentar até 5 antes de uma variável básica baixar de seu limite inferior. Finalmente, tem-se

Exemplo III

$\min(5, \infty, 6) = 5$. O valor da função objetivo é substituído por $-1-(z_2-c_2)\Delta_2 = -1-4\times 5 = -21$, além disso

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \mathbf{y}_2\Delta_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O valor de x_2 é dado por $\Delta_2 = 5$ e a mesma entra na base. x_5 sai da base e o *tableau* é atualizado pivotando-se sobre y_{22}.

Iteração 2

	ℓ		ℓ		ℓ	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	-2	0	5	0	-4	-21
x_4	1	0	2	1	-1	4
x_2	1	1	-1	0	1	5

Todas as variáveis não básicas estão em seus mínimos e o maior valor de $z_j - c_j$ é 5, correspondendo a x_3. Portanto, x_3 entra na base, $\mathbf{y}_3 = [2, -1]^T$ e Δ_3 é dado por

$$\Delta_3 = \min\left(\gamma_1, \gamma_2, u_3 - \ell_3\right) = \min\left(\gamma_1, \gamma_2, 3\right)$$

Exemplo IV

Computado γ_1, tem-se

$$\gamma_1 = \frac{4-0}{2} = 2$$

correspondendo a x_4, portanto $r = 1$. Isso significa que x_4 cairia para seu mínimo se x_3 aumentasse de 2 unidades. Com relação a γ_2, tem-se

$$\gamma_2 = \frac{6-5}{1} = 1$$

correspondendo a x_2, isto é, $r = 2$. Isso significa que x_2 atingiria seu máximo se x_3 aumentasse de 1 unidade. Portanto, $\Delta_3 = \min(3,1,3) = 1 = \gamma_2$, levando a $x_3 = 1 + \Delta_3 = 2$. A função objetivo é substituída por $-21 - (z_3 - c_3) = -26$ e

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \mathbf{y}_3 \Delta_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

x_3 entra e x_2 sai da base (atingindo seu máximo). O *tableau* (com exceção de LD) é atualizado pivotando sobre $y_{r3} = y_{23} = -1$.

Iteração 3

Exemplo V

$$\begin{array}{c|ccccc|c}
 & \ell & u & & & \ell & \\
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & LD \\
\hline
z & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 & -26 \\
\hline
x_4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
x_3 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\
\hline
\end{array}$$

O valor máximo de $z_j - c_j$ para as variáveis não básicas em seus mínimos é 3, correspondendo a x_1. Portanto, x_1 é aumentado, $\mathbf{y}_1 = [3, -1]^T$ e Δ_1 é dado por

$$\Delta_1 = \min(\gamma_1, \gamma_2, u_1 - \ell_1) = \min(\gamma_1, \gamma_2, 4)$$

Computado γ_1, tem-se

$$\gamma_1 = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$$

correspondendo a x_4, portanto $r = 1$. Isso significa que x_4 cairia para seu mínimo se x_1 aumentasse 2/3 de uma unidade. Com relação a γ_2, tem-se

$$\gamma_2 = \frac{4-2}{1} = 2$$

Exemplo VI

correspondendo a x_3, isto é, $r = 3$. Isso significa que x_3 atingiria seu máximo se x_1 aumentasse de 2 unidades. Portanto, $\Delta_3 = \min(2/3, 2, 4) = 2/3 = \gamma_1$, e $x_1 = 2/3$. A função objetivo é substituída por $-26 - (z_1 - c_1) = -28$ e

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \mathbf{y}_1 \Delta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} (2/3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

x_1 entra e x_4 sai da base (atingindo seu mínimo). O *tableau* é atualizado pivotando sobre $y_{11} = -1$.

Iteração 4

		u		ℓ	ℓ	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	0	3	0	-1	0	-28
x_1	1	$2/3$	0	$1/3$	$1/3$	$2/3$
x_3	0	$-1/3$	1	$1/3$	$-2/3$	$8/3$

Exemplo VII

Como $z_j - c_j \geq 0$ para as variáveis não básicas em seus máximos e $z_j - c_j \leq 0$ para as variáveis não básicas em seus mínimos, então o *tableau* apresentado está no ótimo. O valor final das variáveis é

$$[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [2/3, 6, 8/3, 0, 0]^T$$

e o valor da função objetivo é -28.