IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

Estabilidade

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2014

Estabilidade

A estabilidade de um sistema pode ser caracterizada em termos da relação entrada-saída (BIBO estabilidade) ou em termos das variáveis de estado (pontos de equilíbrio).

BIBO estabilidade

Um sistema é BIBO estável (*Bounded-Input Bounded-Output*) se a saída é limitada para toda entrada limitada.

$$|x(t)| < b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

Além disso, um sistema linear invariante no tempo é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso do sistema for absolutamente integrável.

Propriedade 1 (Função de transferência BIBO estável)

Se um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência $H(s)$ for BIBO estável, então $s = j\omega$ pertence ao domínio Ω_h, pois

$$|H(s = j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \exp(-j\omega t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

e também pode-se mostrar (Capítulo 7) que um sistema é BIBO estável se e somente se a resposta ao impulso for absolutamente integrável.

Função de transferência racional causal BIBO estável

Propriedade 2 (Função de transferência racional causal BIBO estável)

Um sistema linear invariante no tempo causal descrito por uma função de transferência racional

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \ , \ \Omega_h = \{s \in \mathbb{C} \ , \ Re(s) > \sigma\} \ , \ \sigma = \max_k Re(\lambda_k)$$

é BIBO estável se e somente se todos os pólos λ_k (isto é, raízes de $D(s) = 0$) tiverem parte real negativa.

Prova: autovalores com parte real negativa garantem que a resposta causal ao impulso

$$h(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k g_k(t) \quad , \quad g_k(t) = t^{r_k} \exp(\lambda_k t) u(t) \ , \ 0 \le r_k \le m$$

é absolutamente integrável.

Definição 1 (Polinômio Hurwitz)

Um polinômio $D(p)$ que possui todas as raízes com parte real negativa é chamado de polinômio Hurwitz.

Propriedade 3

Uma condição necessária para que um polinômio $D(p)$ de grau m, com $\alpha_m > 0$, seja Hurwitz, é que todos os demais m coeficientes sejam positivos.
Prova:

$$D(p) = \alpha_m p^m + \alpha_{m-1} p^{m-1} + \alpha_{m-2} p^{m-2} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad (\alpha_m > 0)$$

$$D(p) = \alpha_m \prod_k (p + a_k) \prod_k (p^2 + 2b_k p + b_k^2 + c_k^2)$$

As raízes reais são $-a_k$ e as complexas são $-b_k \pm jc_k$. Portanto, se

$$a_k > 0 \quad , \quad b_k > 0$$

então todos os coeficientes do polinômio $D(p)$ são positivos.

Exemplo

Exemplo 1.1

A Propriedade 3 é uma condição apenas necessária. Por exemplo, o polinômio

$$p^3 + p^2 + 11p + 51 = (p+3)(p-1+j4)(p-1-j4) = (p+3)(p^2-2p+17)$$

possui todos os coeficientes positivos, mas não é Hurwitz.

Propriedade 4 (Expansão de Stieltjes)

O teste do sinal da parte real das raízes de um polinômio pode ser feito por expansão de Stieltjes

$$\frac{D_m(p)}{D_{m-1}(p)} = \sigma_1 p + \cfrac{1}{\sigma_2 p + \cfrac{1}{\sigma_3 p + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\sigma_{m-1} p + \cfrac{1}{\sigma_m p}}}}}$$

sendo $D_m(p)$ e $D_{m-1}(p)$ polinômios obtidos a partir do polinômio $D(p)$, dados por

$$D_m(p) = \alpha_m p^m + \alpha_{m-2} p^{m-2} + \cdots \quad , \quad D_{m-1}(p) = \alpha_{m-1} p^{m-1} + \alpha_{m-3} p^{m-3} + \cdots$$

Todas as raízes de $D(p) = 0$ possuem parte real negativa se e somente se $\sigma_k > 0$, $k = 1, \ldots, m$.

Exemplo I

Exemplo 1.2

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Note que a condição necessária (todos os coeficientes positivos) é satisfeita.

$$\frac{D_4(p)}{D_3(p)} = \frac{p^4 + 3p^2 + 1}{p^3 + 2p} =$$

Exemplo I

Exemplo 1.2

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Note que a condição necessária (todos os coeficientes positivos) é satisfeita.

$$\frac{D_4(p)}{D_3(p)} = \frac{p^4 + 3p^2 + 1}{p^3 + 2p} = p + \frac{r_2(p) = p^2 + 1}{p^3 + 2p}$$

Exemplo 1.2

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Note que a condição necessária (todos os coeficientes positivos) é satisfeita.

$$\frac{D_4(p)}{D_3(p)} = \frac{p^4 + 3p^2 + 1}{p^3 + 2p} = p + \frac{r_2(p) = p^2 + 1}{p^3 + 2p}$$

$$\frac{D_3(p)}{r_2(p)} = \frac{p^3 + 2p}{p^2 + 1} = p + \frac{r_1(p) = p}{p^2 + 1}$$

$$\frac{r_2(p)}{r_1(p)} = \frac{p^2 + 1}{p} = p + \frac{r_0(p) = 1}{p}$$

Exemplo II

Portanto, colocando na forma da expansão de Stieltjes, tem-se

$$\frac{p^4+3p^2+1}{p^3+2p} = p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p}}}$$

e pode-se concluir que o polinômio possui todas as raízes com parte real negativa. De fato, as raízes são aproximadamente (usando o comando `roots([1 1 3 2 1])` do Matlab):

$$-0.10 \pm j1.55 \quad , \quad -0.40 \pm j0.51$$

Exemplo 1.3

Considere o polinômio

$$D(p) = p^5 + 2p^4 + 2p^3 + p^2 + 2p + 5$$

A expansão de Stieltjes fornece

$$\frac{p^5 + 2p^3 + 2p}{2p^4 + p^2 + 5} = \frac{1}{2}p + \cfrac{1}{\frac{4}{3}p + \cfrac{1}{\frac{10}{9}p + \cfrac{1}{-\frac{1}{3}p + \cfrac{1}{-p}}}}$$

indicando que o polinômio possui raízes com parte real positiva. De fato, as raízes são aproximadamente (usando `Matlab`)

$$-1.50 \quad , \quad -0.93 \pm j1.27 \quad , \quad 0.69 \pm j0.93$$

Propriedade 5 (Determinantes de Hurwitz)

O polinômio de grau m, $\alpha_m > 0$ dado por

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k$$

possui todas as raízes com parte real negativa se e somente se os determinantes $\det(\Delta_k)$ *(menores principais líderes de Δ_m) forem maiores que zero para* $k = 1, \ldots, m$*, com*

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix}\alpha_{m-1}\end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix}\alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2}\end{bmatrix} \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix}\alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3}\end{bmatrix}$$

$$\Delta_m = \begin{bmatrix}\alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \alpha_{m-1} & \alpha_m & \cdots & 0 \\ \alpha_{m-5} & \alpha_{m-4} & \alpha_{m-3} & \alpha_{m-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0\end{bmatrix}$$

Exemplo

Por exemplo, para $m = 4$, tem-se

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

Note que Δ_1, Δ_2 e Δ_3 são as submatrizes de dimensão 1, 2 e 3 da diagonal principal começando no canto superior esquerdo. Note também que, se o determinante de Δ_3 for maior do que zero, a condição $\det(\Delta_4) = \det(\Delta_3)\alpha_0 > 0$ ocorre se e somente se $\alpha_0 > 0$.

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 =$$

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_1 > 0 \quad , \quad \det(\Delta_2) = \alpha_1 \alpha_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 > 0$$

Para $m = 3$, o polinômio

$$p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_3 =$$

Exemplo 1.4

Para $m = 1$, $p + \alpha_0$ possui raiz negativa se e somente se $\det(\Delta_1) = \alpha_0 > 0$.

Para $m = 2$, o polinômio

$$p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_1 > 0 \quad , \quad \det(\Delta_2) = \alpha_1 \alpha_0 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_0 > 0$$

Para $m = 3$, o polinômio

$$p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} \alpha_2 & 1 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

possui raízes com parte real negativa se e somente se

$$\det(\Delta_1) = \alpha_2 > 0 \;\; , \;\; \det(\Delta_2) = \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_0 > 0 \;\; , \;\; \alpha_0 > 0$$

Exemplo 1.5

Considere novamente o polinômio $D(p) = (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$, que é Hurwitz pois

$$\Delta_4 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\Delta_1) = 4 \,, \det(\Delta_2) = 20 \,, \det(\Delta_3) = 64 \,, \det(\Delta_4) = 64$$

A tabela de Routh[1] sistematiza o teste de Hurwitz sem o cálculo explícito dos determinantes, representando uma alternativa à expansão de Stieltjes.

[1] Edward John Routh, matemático canadense 1831-1907.

Propriedade 6 (Tabela de Routh)

Considere o polinômio

$$\alpha_5 p^5 + \alpha_4 p^4 + \alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 \quad , \quad \alpha_k > 0 \ , \ k = 0, \ldots, 5$$

Todas as raízes possuem parte real negativa se e somente se todos os elementos da Tabela 1 forem positivos ou, equivalentemente, se todos os elementos da primeira coluna forem positivos. A ocorrência de um zero ou de um número negativo implica que o polinômio não é Hurwitz (ou seja, não possui todas as raízes com parte real negativa).

O resultado (em termos do sinal da parte real das raízes) não se altera se uma linha da tabela for multiplicada por um número positivo.

Tabela de Routh

p^5	α_5	α_3	α_1
p^4	α_4	α_2	α_0
p^3	$\beta_3 = \dfrac{(\alpha_3\alpha_4 - \alpha_2\alpha_5)}{\alpha_4}$	$\beta_1 = \dfrac{(\alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5)}{\alpha_4}$	
p^2	$\gamma_2 = \dfrac{(\alpha_2\beta_3 - \beta_1\alpha_4)}{\beta_3}$	$\gamma_0 = \alpha_0$	
p^1	$\delta_1 = \dfrac{(\beta_1\gamma_2 - \gamma_0\beta_3)}{\gamma_2}$		
p^0	$\varepsilon_0 = \alpha_0$		

Tabela : Tabela de Routh-Hurwitz.

Note que o elemento da linha associada a p^0 é sempre igual a α_0

Exemplo

Exemplo 1.6

O polinômio

$$p^5 + 8p^4 + 25p^3 + 40p^2 + 34p + 12$$

possui raízes com parte real negativa, pois a tabela de Routh é dada por

Exemplo 1.6

O polinômio
$$p^5 + 8p^4 + 25p^3 + 40p^2 + 34p + 12$$
possui raízes com parte real negativa, pois a tabela de Routh é dada por

p^5	1	25	34
p^4	8	40	12
p^3	20	65/2	
p^2	27	12	
p^1	1275/54		
p^0	12		

De fato, as raízes de $D(p) = 0$ (obtidas pelo `Matlab`) são
$$-1, -2, -3, -1+j, -1-j$$

Exemplo 1.7

Considere novamente o polinômio do Exemplo 1.6, dado por

$$p^5+8p^4+25p^3+40p^2+34p+12 \quad \Rightarrow \quad D_5(p)=p^5+25p^3+34p \ ,$$
$$D_4(p)=8p^4+40p^2+12$$

A expansão fornece

$$\frac{D_5(p)}{D_4(p)}=\frac{p^5+25p^3+34p}{8p^4+40p^2+12}=\frac{1}{8}p+\frac{r_3(p)=20p^3+(65/2)p}{D_4(p)}$$

$$\frac{D_4(p)}{r_3(p)}=\frac{8p^4+40p^2+12}{20p^3+(65/2)p}=\frac{8}{20}p+\frac{r_2(p)=27p^2+12}{r_3(p)}$$

$$\frac{r_3(p)}{r_2(p)}=\frac{20p^3+(65/2)p}{27p^2+12}=\frac{20}{27}p+\frac{r_1(p)=(1275/54)p}{r_2(p)}$$

$$\frac{r_2(p)}{r_1(p)}=\frac{27p^2+12}{(1275/54)p}=\frac{1458}{1275}p+\frac{r_0(p)=12}{r_1(p)}$$

Exemplo II

$$\frac{r_1(p)}{r_0(p)} = \frac{(1275/54)p}{12} = \frac{1275}{648}p$$

Colocando na forma final da expansão, tem-se

$$\frac{D_5(p)}{D_4(p)} = \frac{1}{8}p + \cfrac{1}{\frac{2}{5}p + \cfrac{1}{\frac{20}{27}p + \cfrac{1}{\frac{1458}{1275}p + \cfrac{1}{\frac{1275}{648}p}}}}$$

e portanto o polinômio tem raízes com parte real negativa. É interessante notar que os valores de σ_k, $k = 1, \ldots, 5$ têm relação com os valores da primeira coluna da tabela de Routh, isto é, σ_1 é o elemento da linha 1 dividido pelo da linha 2, σ_2 é o da linha 2 pela linha 3, e assim sucessivamente.

Note também que os demais valores da tabela aparecem nos coeficientes dos polinômios obtidos como resto das divisões.

Note que a segunda e a terceira linhas da Tabela 1 definem o polinômio de grau 4

$$\alpha_4 p^4 + \beta_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \beta_1 p + \alpha_0$$

cuja tabela de Routh-Hurwitz reproduz a Tabela 1 (suprimida a primeira linha). Essa recorrência permite o enunciado da seguinte propriedade.

Propriedade 7 (Teste de Routh-Hurwitz (G. Meinsma, 1995))

O polinômio

$$D(p) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k p^k \quad , \quad \alpha_k > 0 \ , \ k = 0, \ldots, m$$

é Hurwitz se e somente se o polinômio de grau $m-1$

$$R_{m-1}(p) = D(p) - \frac{\alpha_m}{\alpha_{m-1}} p D_{m-1}(p)$$

for Hurwitz. Por recorrência, define-se um algoritmo para testar se um polinômio é Hurwitz.

Exemplo 1.8

Considere novamente o polinômio $D(p) = (p+1)^4 = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1$, que é Hurwitz. De fato,

$$D(p) = \frac{1}{4}p\left(4p^3 + 4p\right) + \underbrace{4p^3 + 5p^2 + 4p + 1}_{R_3(p)}$$

$$R_3(p) = \frac{4}{5}p\left(5p^2 + 1\right) + \underbrace{5p^2 + (16/5)p + 1}_{R_2(p)}$$

$$R_2(p) = \frac{25}{16}p\big((16/5)p\big) + \underbrace{(16/5)p + 1}_{R_1(p)}$$

e, como $R_1(p)$ é Hurwitz, os polinômios $R_2(p)$, $R_3(p)$ e $D(p)$ também o são.

A tabela de Routh pode também informar o número de raízes com parte real positiva.

Propriedade 8

Se não ocorrer nenhum zero na primeira coluna da tabela de Routh, o número de mudanças de sinal na primeira coluna é igual ao número de raízes do polinômio com parte real positiva. A ocorrência de um zero indica que o polinômio não é Hurwitz e a tabela não pode ser completada. Nesses casos, duas técnicas podem ser utilizadas:
(1) trocar o zero por ε, completar a tabela e estudar o sinal dos coeficientes quando $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ (número distinto de trocas de sinal para $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to 0^-$ indica raiz com parte real nula);
(2) estudar o polinômio $D(1/p)p^m$ (isto é, o polinômio definido pelos coeficientes lidos na ordem inversa), que possui o mesmo número de raízes com parte real positiva que $D(p)$, pois se λ_k, $k = 1, \ldots, m$ são as raízes de $D(p)$, tem-se

$$D(1/p)p^m = \prod_{k=1}^{m}(1/p - \lambda_k)p = \prod_{k=1}^{m}(1 - \lambda_k p)$$

cujas raízes são $1/\lambda_k$. Note que se para raízes complexas, por exemplo, $\lambda = \alpha + j\beta$, tem-se $1/\lambda = (\alpha - j\beta)/(\alpha^2 + \beta^2)$ e portanto o sinal da parte real não se altera.

Exemplo 1.9

Considere o polinômio

$$D(p) = p^5 + p^4 + 2p^3 + 2p^2 + 3p + 15$$

A tabela de Routh é dada por

p^5	1	2	3
p^4	1	2	15
p^3	ε	-12	
p^2	$(2\varepsilon + 12)/\varepsilon$	15	
p^1	$-12 - 15\varepsilon^2/(2\varepsilon + 12)$		
p^0	15		

Exemplo II

Quando $\varepsilon \to 0^+$, os sinais da primeira coluna são $+$, $+$, $+$, $+$, $-$ e $+$ e quando $\varepsilon \to 0^-$, os sinais da primeira coluna são $+$, $+$, $-$, $-$, $-$ e $+$. Nos dois casos, ocorrem duas trocas de sinal, indicando a existência de duas raízes com parte real positiva. De fato, as raízes são (aproximadamente)

$$-1.70 \;,\; -0.68 \pm j1.71 \;,\; 1.03 \pm j1.24$$

O mesmo resultado pode ser obtido pela análise de $p^m D(1/p)$, dado por

$$15p^5 + 3p^4 + 2p^3 + 2p^2 + p + 1$$

cuja tabela de Routh é

p^5	15	2	1
p^4	3	2	1
p^3	-8	-4	
p^2	0.5	1	
p^1	12		
p^0	1		

Exemplo 1.10

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 3p + 2$$

A tabela de Routh é dada por

p^4	1	3	2
p^3	3	3	
p^2	2	2	

Exemplo 1.10

Considere o polinômio

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 3p + 2$$

A tabela de Routh é dada por

p^4	1	3	2
p^3	3	3	
p^2	2	2	
p^1	ε		
p^0	2		

Neste caso, $\varepsilon \to 0^+$ não implica em mudança de sinal e $\varepsilon \to 0^-$ implica em duas trocas, indicando a existência de raiz com parte real nula. De fato, as raízes são

$$-1, -2, \pm j$$

Estabilidade do estado

A estabilidade do estado (ou estabilidade interna) é definida pelo comportamento das trajetórias do vetor de estados para entrada constante (em geral nula) e condições iniciais em torno do ponto de equilíbrio (estabilidade local).

Considere o sistema autônomo

$$\dot{v} = f(v)$$

cujos pontos de equilíbrio são dados por

$$f(\bar{v}) = 0$$

Um ponto de equilíbrio pode ser estável (assintoticamente ou não) ou instável.

Estabilidade de um ponto de equilíbrio

Definição 2 (Estabilidade de um ponto de equilíbrio)

O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ *é estável se, para* $\varepsilon > 0$*, existir* $\alpha(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha(\varepsilon) \ , \quad \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \|v(t) - \bar{v}\| < \varepsilon \ , \ \forall t \geq 0$$

Definição 3 (Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio)

O ponto de equilíbrio $\bar{v}$ *é assintoticamente estável se for estável e, além disso, se existir* $\alpha > 0$ *tal que*

$$\|v(0) - \bar{v}\| < \alpha \ , \quad \forall v(0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} v(t) = \bar{v}$$

Note que, pela definição, existe sempre uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio que é um domínio de atração, ou seja, um domínio no espaço de estados para o qual toda trajetória iniciada em seu interior permanece confinada e tende assintoticamente para o ponto de equilíbrio.

Estabilidade assintótica de sistema linear

Propriedade 9 (Estabilidade assintótica de sistema linear)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A *for negativa, pois a solução do sistema linear é dada por*

$$v(t) = \exp(At)v(0)$$

que é composta pelos modos próprios associados às raízes de $\Delta(\lambda) = 0$*. As raízes* $\Delta(\lambda) = 0$ *são os autovalores da matriz* A*.*

Note que se nenhum autovalor é nulo, a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema e, portanto, se a origem é assintoticamente estável, então o sistema é globalmente assintoticamente estável.

Relação com BIBO estabilidade

Propriedade 10 (Relação com BIBO estabilidade)

Considere o sistema linear invariante no tempo SISO descrito por

$$\dot{v} = Av + bx \quad , \quad y = cv + dx$$

Então

• *A função de transferência é dada por*

$$H(s) = c(sI - A)^{-1}b + d$$

• *Todo pólo de $H(s)$ é também autovalor de A e, portanto, a estabilidade assintótica implica em BIBO estabilidade.*

• *Nem sempre todos os autovalores de A são pólos de $H(s)$, pois pode haver cancelamentos de zeros e pólos (não controlabilidade, não observabilidade ou ambos). Portanto, a BIBO estabilidade não necessariamente implica em estabilidade assintótica do estado.*

• *Para sistemas controláveis e observáveis, a BIBO estabilidade implica em estabilidade assintótica, pois todos os autovalores de A são pólos do sistema.*

Propriedade 11

Considere o sistema $\dot{v} = f(v)$. O ponto de equilíbrio $\bar{v} = 0$ é assintoticamente estável se existir um domínio Ω contendo a origem e uma função escalar $\psi(v)$ diferenciável tal que

$$\psi(0) = 0 \quad , \quad \psi(v) > 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\} \quad e \quad \dot{\psi}(v) = \frac{d}{dt}\psi(v) < 0 \ \forall v \in \Omega - \{0\}$$

Exemplo 1.11

O sistema escalar

$$\dot{v} = -v^3$$

é assintoticamente estável em $\Omega = \mathbb{R}$ (portanto é globalmente assintoticamente estável), pois para $\psi(v) = v^2$,

$$\psi(0) = 0\ ,\ \ \psi(v) > 0\ \forall v \neq 0 \ \ \text{e} \ \ \dot{\psi}(v) = 2v\dot{v} = -2v^4 < 0\ \forall v \neq 0$$

De fato, para $v(0) > 0$, tem-se

$$\frac{dv}{v^3} = -dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}d(v^{-2}) = dt$$

e portanto

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{1+2tv^2(0)}}v(0)$$

Exemplo 1.12 (Domínio de atração)

Considere o sistema não-linear dado por

$$\dot{v}_1 = v_2 \quad (1)$$

$$\dot{v}_2 = -v_1 + \frac{1}{3}v_1^3 - v_2 \quad (2)$$

A função de Lyapunov

$$\psi(v) = \frac{3}{4}v_1^2 - \frac{1}{12}v_1^4 + \frac{1}{2}v_1 v_2 + \frac{1}{2}v_2^2 = \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}v_1 v_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$
$$= \frac{1}{4}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}}_{>0} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

tem derivada temporal

$$\dot{\psi}(v) = -\frac{1}{2}v_1^2(1 - \frac{1}{3}v_1^2) - \frac{1}{2}v_2^2$$

Exemplo – Domínio de atração II

Pode ser verificado que $\psi(v) > 0$ e $\dot{\psi}(v) < 0$ para todo $v_2 \neq 0$ e para $v_1 \neq 0$ tal que $1 - \frac{1}{3}v_1^2 > 0$, ou seja, para v pertencente ao domínio

$$\Omega = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3} \right\} - \{0\}$$

Portanto, pela Propriedade 11 (Lyapunov), a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável e existe um domínio de atração em torno de $(0,0)$.

Note, no entanto, que Ω não é um domínio de atração. Como ilustrado no plano de fase da Figura 1, existem trajetórias que, iniciadas dentro do domínio Ω (e, portanto, com $\dot{\psi}(v) < 0$), acabam saindo. Fora do domínio Ω, não há garantias de que a derivada da função de Lyapunov será negativa. Como conclusão, Ω não é uma estimativa do domínio de atração do ponto de equilíbrio $v = 0$.

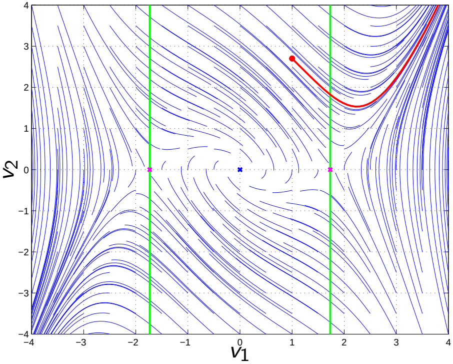

Figura : Plano de fase para o sistema (1)-(2). Em traço mais grosso, uma trajetória iniciada no ponto $v(0) = [1 \;\; 2.7]'$ que sai do domínio Ω e diverge.

Exemplo – Domínio de atração IV

O comportamento local do sistema pode ser estudado em torno dos pontos de equilíbrio $(0,0)$, $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},0)$, mostrados na Figura 1. O jacobiano do sistema é dado por

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial v_j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1+v_1^2 & -1 \end{bmatrix}$$

resultando em representações linearizadas em torno dos pontos de equilíbrio dadas por

$$(0,0)\ , \qquad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} v\ , \qquad \lambda_{1,2} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \text{estável}$$

$$(-\sqrt{3},0) \text{ e } (\sqrt{3},0)\ , \qquad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} v\ , \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 \quad , \quad \text{instável}$$

Estimativas da região de atração podem ser obtidas por meio de conjuntos positivamente invariantes, como por exemplo

$$\mathscr{D} = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ \psi(v) \le c\}$$

quando $\mathscr{D}$ é limitado e está contido em Ω (domínio para o qual a derivada da função de Lyapunov é negativa). Uma trajetória iniciada no instante t_0 em $\mathscr{D}$ permanece dentro do conjunto para todo $t \geq t_0$ e, como $\mathscr{D} \subset \Omega$, $\dot{\psi}(v) < 0$ garante a convergência assintótica para a origem.

Para a função de Lyapunov (3), pode-se procurar pelo maior valor de c tal que $\psi(v) \leq c$ dentro da região Ω, resultando em $c \approx 1.124$. A Figura 2 mostra as regiões no plano (v_1, v_2) para as quais $\psi(v) = 1.124$. Note que apenas a região contida no intervalo $-\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}$ pode ser usada como uma estimativa do domínio de atração $\mathscr{D} \subset \Omega$. O verdadeiro domínio de atração pode ser obtido por simulações exaustivas das equações diferenciais (1)-(2), resultando no conjunto de condições iniciais mostrado na Figura 3.

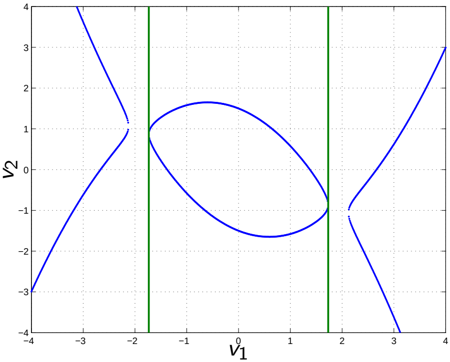

Figura : Regiões no plano de fase do sistema (1)-(2) para as quais $\psi(v) = 1.124$ com $\psi(v)$ dada em (3). A estimativa da região de atração está no intervalo $-\sqrt{3} < v_1 < \sqrt{3}$.

Exemplo – Domínio de atração VII

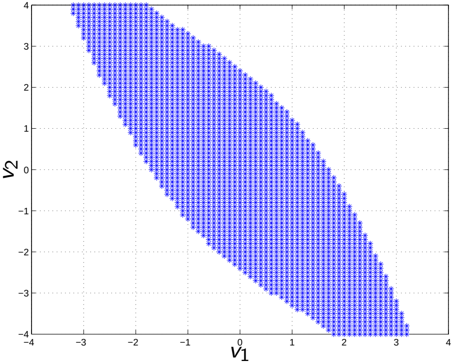

Figura : Domínio de atração para o sistema (1)-(2), isto é, conjunto das condições iniciais que resultam em trajetórias estáveis.

Observe que a Propriedade 11 depende da escolha da função $\psi(v)$ e é apenas suficiente para a estabilidade assintótica. Freqüentemente, busca-se para $\psi(v)$ uma forma quadrática dada por

$$\psi(v) = v'Pv$$

sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva, isto é, matriz com todos os autovalores reais e positivos.

A derivada da função de Lyapunov é dada por

$$\dot{\psi}(v) = \dot{v}'Pv + v'P\dot{v} = f(v)'Pv + v'Pf(v)$$

e o teste de estabilidade consiste na análise do sinal de $\dot{\psi}(v)$, isto é, o sistema é assintoticamente estável se $\dot{\psi}(v) < 0, \forall v \neq 0$.

Exemplo 1.13 (Circuito RLC)

Considere o circuito mostrado na Figura 4 cujas equações são

$$v_1 = C\dot{v}_2 + \frac{v_2}{R} \quad ; \quad x = L\dot{v}_1 + v_2$$

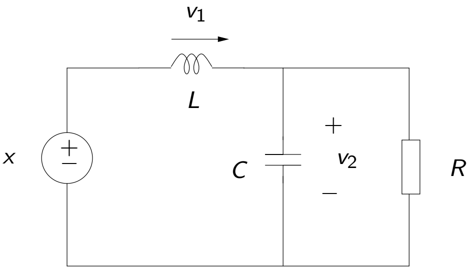

Figura : Circuito *RLC*.

Para condições iniciais nulas, o sistema é linear e invariante no tempo. Os pontos de equilíbrio podem ser obtidos das equações de estado impondo-se que as derivadas das variáveis de estado são nulas. Para a entrada $x = 0$ (sistema autônomo), tem-se como ponto de equilíbrio $v_1 = 0$, $v_2 = 0$.

Observe que, para parâmetros R, L e C positivos, a energia armazenada no circuito (magnética e elétrica) decresce assintoticamente.

$$\psi = \frac{1}{2} L v_1^2 + \frac{1}{2} C v_2^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = L v_1 \dot{v}_1 + C v_2 \dot{v}_2$$

A função energia $\psi(v_1, v_2)$ é uma função de Lyapunov do sistema, pois é positiva para $(v_1, v_2) \neq (0,0)$. Além disso, substituindo as derivadas, obtém-se

$$\dot{\psi} = -\frac{v_2^2}{R} < 0 \qquad \text{para } v_2 \neq 0 \text{ e } v_1 \text{ qualquer}$$

indicando que o sistema é assintoticamente estável (tende ao ponto de equilíbrio $v_1 = v_2 = 0$). Observe que a derivada da energia é a potência dissipada no resistor.

Exemplo – Circuito RLC III

Definindo $y = v_2$ e usando o operador derivada no tempo $p = \dfrac{d}{dt}$, tem-se a relação entrada-saída

$$\left(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}\right)y = \frac{1}{LC}x$$

que é BIBO estável.

Desigualdade de Lyapunov I

Propriedade 12 (Desigualdade de Lyapunov)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é assintoticamente estável se e somente se existir $P = P' > 0$ *tal que*

$$A'P + PA < 0 \qquad \textit{(definida negativa)}$$

Prova: a suficiência é conseqüência da escolha da função de Lyapunov

$$\psi(v) = v'Pv \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}(v) = \dot{v}'Pv + v'P\dot{v} = v'(A'P + PA)v$$

e, portanto,

$$\psi(v) > 0 \;\; e \;\; \dot{\psi}(v) < 0 \; , \; v \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P > 0 \; , \; A'P + PA < 0$$

Note que $A'P + PA$ *é uma matriz simétrica.*

Desigualdade de Lyapunov II

A determinação de uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaz a desigualdade acima pode ser feita pela solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

com $Q = Q' > 0$ arbitrária, por exemplo, igual à matriz identidade.

Teorema 1 (Lyapunov)

Para qualquer matriz $Q = Q' > 0$, a solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -Q$$

é única, simétrica e definida positiva se e somente se todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Prova:

Primeiramente, mostra-se que se A possui autovalores com parte real negativa, então a solução é única, simétrica e definida positiva.

Desigualdade de Lyapunov III

- Como A e A' possuem os mesmos autovalores e todos têm parte real negativa, não existem dois deles tais que a soma seja nula. Portanto, a solução P é única (utiliza-se uma propriedade da equação de Sylvester).

- A solução pode ser expressa como

$$P = \int_0^{\infty} \exp(A't)Q\exp(At)dt$$

Substituindo na equação, tem-se

$$A'P + PA = \int_0^{+\infty} \Big(A'\exp(A't)Q\exp(At) + \exp(A't)Q\exp(At)A \Big) dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\Big(\exp(A't)Q\exp(At)\Big) dt = \exp(A't)Q\exp(At)\Big|_{t=0}^{+\infty} = -Q$$

pois, como A tem autovalores com parte real negativa, $\lim_{t\to+\infty}\exp(At) = 0$.

- Como Q é simétrica, P também o é.

• Como Q é definida positiva, existe R não singular tal que $Q = R'R$. Então, P é definida positiva, pois

$$v'Pv = \int_0^{+\infty} v' \exp(A't)R'R\exp(At)v \; dt = \int_0^{+\infty} \|R\exp(At)v\|^2 dt > 0 \; , \; \forall v \neq 0$$

Para completar a demonstração, prova-se que se $P = P' > 0$, então A possui todos os autovalores com parte real negativa.
Pré multiplicando a equação de Lyapunov por $(v^*)'$ e pós multiplicando por v, com v autovetor de A associado ao autovalor λ, tem-se

$$(v^*)'A'Pv + (v^*)'PAv = (\lambda^* + \lambda)(v^*)'Pv = 2\text{Re}(\lambda)(v^*)'Pv = -(v^*)'Qv$$

Como $(v^*)'Pv$ e $(v^*)'Qv$ são reais positivos, tem-se $\text{Re}(\lambda) < 0$.

A propriedade a seguir fornece procedimentos para determinar se uma matriz é definida positiva.

Propriedade 13 (Matriz definida positiva)

Uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida positiva se e somente se qualquer uma das condições for verificada.

- $v'Pv > 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$;
- *Todos os autovalores são positivos;*
- *Todos os menores principais líderes são positivos;*
- *Existe $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular tal que $P = R'R$.*

Note que uma condição necessária para que uma matriz seja definida positiva é que todos os elementos da diagonal sejam positivos.

Uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é definida negativa se $-Q$ for definida positiva.

Exemplo 1.14

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} v$$

Pela solução da equação de Lyapunov

$$A'P + PA = -\mathrm{I}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4p_2 & p_1 - 3p_2 - 2p_3 \\ p_1 - 3p_2 - 2p_3 & 2p_2 - 6p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os menores principais líderes de P são 1.25 e 0.25, e portanto a matriz P é definida positiva, indicando que o sistema é assintoticamente estável.

Exemplo 1.15

Considere o sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} v$$

$$A'P + PA = -6\mathrm{I} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1 & p_2 \\ p_2 & -1 \end{bmatrix}$$

Os menores principais líderes são 1 e $-1 - p_2^2$, indicando que o sistema não é assintoticamente estável.

Propriedade 14 (Estabilidade de sistema linear)

O sistema linear autônomo

$$\dot{v} = Av$$

é estável se e somente se a parte real de todos os autovalores de A *for negativa ou nula, e os blocos de Jordan associados aos autovalores com parte real nula forem de ordem igual a um. Note que, nesse caso, a trajetória* $v(t)$ *é sempre limitada, qualquer que seja a condição inicial* $v(0)$*. Alguns livros utilizam os termos "estabilidade no sentido de Lyapunov" ou "sistema marginalmente estável".*

Caso contrário, isto é, se houver algum autovalor com parte real positiva ou blocos de Jordan de ordem maior que um associados aos autovalores de parte real nula, o sistema é instável.

Exemplo 1.16

Considere o sistema (oscilador senoidal ideal)

$$\ddot{y} + y = 0 \quad , \quad v_1 = y \ , \ v_2 = \dot{y} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} v$$

cuja forma de Jordan é diagonal (autovalores distintos), $AQ = Q\hat{A}$, dada por

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

O sistema é estável, pois os blocos de Jordan associados aos autovalores de parte real nula têm tamanho um. De fato, a solução é dada por

$$v(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} v(0)$$

Note que o sistema não é assintoticamente estável.

Exemplo 1.17

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} v$$

é estável (mas não assintoticamente), pois possui um autovalor igual a -1 e outro igual a 0 (portanto, associado a um bloco de Jordan de tamanho um). De fato, a solução é

$$v_1(t) = v_1(0) \quad , \quad v_2(t) = \exp(-t) v_2(0)$$

Exemplo 1.18

O sistema

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} v$$

é instável, pois possui um bloco de Jordan de ordem dois associado ao autovalor 0. De fato, a solução é

$$v_1(t) = v_1(0) + tv_2(0) \quad , \quad v_2(t) = v_2(0)$$