IA888- Análise de Sinais e de Sistemas Lineares

Transformada Z Aplicada a Probabilidade

Prof. Ricardo C.L.F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2014

A transformada Z é um operador matemático eficiente no tratamento de variáveis aleatórias discretas, como por exemplo nas distribuições de Bernoulli, binomial, geométrica, Poisson, Erlang, etc.

Considere a seqüência enumerável $p[k]$ de escalares reais (positivos ou nulos) tal que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] = 1$$

na qual, freqüentemente, $p[k] = 0$ para $k = -1, -2, -3, \ldots$

Definição 1 (Variável Aleatória Discreta)

É uma função $\mathbb{X}$ à qual está associada uma distribuição de probabilidade

$$\Pr\{\mathbb{X} = k\} = p[k] \geq 0 \; ; \; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k] = 1$$

Definição 2 (Esperança Matemática)

$$\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\} = \sum_k f(k)p[k]$$

Definição 3 (Momento de ordem m)

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^m\} = \sum_k k^m p[k] \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Definição 4 (Média)

$$\bar{x} = \mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_k kp[k]$$

ou seja, a média é o momento de primeira ordem.

Definição 5 (Variância)

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \sum_k (k - \bar{x})^2 p[k]$$

Propriedade

Propriedade 1

A variância da variável aleatória $\mathbb{X}$ é igual ao momento de segunda ordem menos o momento de primeira ordem ao quadrado, ou seja,

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2$$

pois '

$$\sum_k (k-\bar{x})^2 p[k] = \sum_k k^2 p[k] - 2\bar{x}\sum_k kp[k] + \bar{x}^2 \sum_k p[k] = \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

Exemplo 1.1

Considere a equação a diferenças de primeira ordem com $0 < \rho < 1$ que descreve a cadeia markoviana da fila M/M/1 (chegadas e serviços com taxas independentes entre si que dependem apenas do estado da cadeia, um servidor e fila de espera não limitada) dada por $\mu p[n+1] = \lambda p[n]$,

$$\Rightarrow \quad p[n+1] = \rho p[n] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad \rho = \lambda/\mu \quad ; \quad p[n] = 0 \ , \ n < 0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[n] = 1$$

Sendo λ a taxa de chegadas e μ a taxa de serviços.

Exemplo 1.1

Considere a equação a diferenças de primeira ordem com $0 < \rho < 1$ que descreve a cadeia markoviana da fila M/M/1 (chegadas e serviços com taxas independentes entre si que dependem apenas do estado da cadeia, um servidor e fila de espera não limitada) dada por $\mu p[n+1] = \lambda p[n]$,

$$\Rightarrow \quad p[n+1] = \rho p[n] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad \rho = \lambda/\mu \quad ; \quad p[n] = 0 \ , \ n < 0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[n] = 1$$

Sendo λ a taxa de chegadas e μ a taxa de serviços. Por substituição sistemática, tem-se

$$p[1] = \rho p[0] \ ; \ \ p[2] = \rho p[1] = \rho^2 p[0] \ ; \ \ p[3] = \rho p[2] = \rho^3 p[0] \ ; \ \ \ldots \ ; \ \ p[n] = \rho^n p[0]$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$, tem-se

Exemplo 1.1

Considere a equação a diferenças de primeira ordem com $0 < \rho < 1$ que descreve a cadeia markoviana da fila M/M/1 (chegadas e serviços com taxas independentes entre si que dependem apenas do estado da cadeia, um servidor e fila de espera não limitada) dada por $\mu p[n+1] = \lambda p[n]$,

$$\Rightarrow \quad p[n+1] = \rho p[n] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad \rho = \lambda/\mu \quad ; \quad p[n] = 0 \ , \ n < 0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p[n] = 1$$

Sendo λ a taxa de chegadas e μ a taxa de serviços. Por substituição sistemática, tem-se

$$p[1] = \rho p[0] \ ; \ \ p[2] = \rho p[1] = \rho^2 p[0] \ ; \ \ p[3] = \rho p[2] = \rho^3 p[0] \ ; \ \ \ldots \ ; \ \ p[n] = \rho^n p[0]$$

Como $\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$, tem-se

$$p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n] \qquad (u[n] = \text{função degrau})$$

que é a distribuição geométrica. Observe que $p[0] = 1-\rho$ é a probabilidade do sistema estar vazio (servidor desocupado na teoria de filas).

Exemplo 1.2 (Bernoulli)

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\}=p>0 \quad , \quad \Pr\{\mathbb{X}=0\}=1-p=q>0$$

A variável aleatória de Bernoulli[a] modela processos com duas possibilidades; por exemplo, probabilidade de um servidor estar livre ou ocupado.

Exemplo – Bernoulli

Exemplo 1.2 (Bernoulli)

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\}=p>0 \quad , \quad \Pr\{\mathbb{X}=0\}=1-p=q>0$$

A variável aleatória de Bernoulli[a] modela processos com duas possibilidades; por exemplo, probabilidade de um servidor estar livre ou ocupado.

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\}=\sum_k kp[k]=1p+0(1-p)=p \quad , \quad \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\}=\sum_k k^2p[k]=1p+0(1-p)=p$$

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2=\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\}-\mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2=p(1-p)=pq$$

[a] Jacob (Jacques) Bernoulli, matemático suiço 1654–1705.

Definição 6 (Independência)

Duas variáveis aleatórias discretas são independentes se a probabilidade conjunta for igual ao produto das probabilidades, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\}$$

Propriedade 2 (Independência)

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{f(\mathbb{X})g(\mathbb{Y})\}=\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\}\mathscr{E}\{g(\mathbb{Y})\}$$

pois

Independência

Definição 6 (Independência)

Duas variáveis aleatórias discretas são independentes se a probabilidade conjunta for igual ao produto das probabilidades, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\}$$

Propriedade 2 (Independência)

$$\Pr\{\mathbb{X}=x,\mathbb{Y}=y\}=\Pr\{\mathbb{X}=x\}\Pr\{\mathbb{Y}=y\} \quad\Rightarrow\quad \mathscr{E}\{f(\mathbb{X})g(\mathbb{Y})\}=\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\}\mathscr{E}\{g(\mathbb{Y})\}$$

pois

$$\mathscr{E}\{f(\mathbb{X})g(\mathbb{Y})\}=\sum_k\sum_m f(k)g(m)\Pr\{\mathbb{X}=k,\mathbb{Y}=m\}=$$

$$=\sum_k f(k)\Pr\{\mathbb{X}=k\}\sum_m g(m)\Pr\{\mathbb{Y}=m\}$$

Definição 7 (Transformada Z)

A transformada Z da série p[n] é dada por[a]

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k$$

[a] Note que a transformada Z é definida com z^k (e não z^{-k}) para ficar de acordo com a maior parte dos livros de probabilidade. Duas conseqüências importantes disso são: a região de convergência para seqüências à direita é o interior de um círculo (e não o exterior), e na Propriedade do Operador Derivada não aparece o sinal negativo.

Propriedade 3

$$\mathscr{Z}\{p[n]\} = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} \quad \textit{pois}$$

Transformada Z

Definição 7 (Transformada Z)

A transformada Z da série $p[n]$ *é dada por*[a]

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{p[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k$$

[a]Note que a transformada Z é definida com z^k (e não z^{-k}) para ficar de acordo com a maior parte dos livros de probabilidade. Duas conseqüências importantes disso são: a região de convergência para seqüências à direita é o interior de um círculo (e não o exterior), e na Propriedade do Operador Derivada não aparece o sinal negativo.

Propriedade 3

$$\mathscr{Z}\{p[n]\} = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} \quad \textit{pois}$$

$$f(\mathbb{X}) = z^{\mathbb{X}} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{f(\mathbb{X})\} = \sum_k f(k)\Pr\{\mathbb{X} = k\} = \sum_k z^k p[k] = \mathscr{Z}\{p[n]\}$$

Exemplo

Exemplo 1.3

A transformada Z de uma variável aleatória constante igual a m, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X}=m\}=1 \quad , \quad p[n]=\delta[n-m]$$

é dada por

Exemplo 1.3

A transformada Z de uma variável aleatória constante igual a m, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X} = m\} = 1 \quad , \quad p[n] = \delta[n - m]$$

é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k - m] z^k = z^m$$

Exemplo 1.4

Seja $\mathbb{X}$ a variável aleatória que descreve o número de elementos na fila M/M/1 do Exemplo 1.1. A distribuição de probabilidade é dada por

$p[n] = (1 - \rho)\rho^n u[n] \quad , \quad 0 < \rho < 1.$ A transformada Z de $p[n]$ é dada por

Exemplo

Exemplo 1.3

A transformada Z de uma variável aleatória constante igual a m, isto é,

$$\Pr\{\mathbb{X} = m\} = 1 \quad , \quad p[n] = \delta[n-m]$$

é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[k-m] z^k = z^m$$

Exemplo 1.4

Seja $\mathbb{X}$ a variável aleatória que descreve o número de elementos na fila M/M/1 do Exemplo 1.1. A distribuição de probabilidade é dada por

$p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n] \quad , \quad 0 < \rho < 1$. A transformada Z de $p[n]$ é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = (1-\rho) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\rho z)^k u[k] = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \quad , \quad |z| < \frac{1}{\rho}$$

Propriedade 4 (Soma)

$$\mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} = G_{\mathbb{X}}(1) = \sum_k p[k] = 1$$

Note que esta propriedade pode ser usada para testar eventuais erros nas expressões das transformadas Z das distribuições de probabilidade.

Propriedade 5 (Operador Derivada)

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathscr{Z}\{p[n]\} = \mathscr{Z}\{n^m p[n]\} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

pois

$$z\frac{d}{dz}\mathscr{Z}\{p[n]\} = z\sum_k kz^{k-1}p[k] = \sum_k kp[k]z^k = \mathscr{Z}\{np[n]\}$$

e a aplicação recorrente do operador $\left(\frac{zd}{dz}\right)$ *prova a propriedade.*

Propriedade 6 (Momentos)

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^m\} = \left(\frac{zd}{dz}\right)^m \mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} = \mathscr{Z}\{n^m p[n]\}\Big|_{z=1} \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+$$

Esta propriedade pode ser usada para o cálculo dos momentos de ordem m.

Propriedade 7 (Variância)

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = \left(\frac{zd}{dz}\right)^2 \mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1} - \left(\left(\frac{zd}{dz}\right)\mathscr{Z}\{p[n]\}\Big|_{z=1}\right)^2$$

Propriedade 8 (Série de Taylor)

Seqüências $p[n]$ *à direita do zero podem ser calculadas a partir da série de Taylor*[a] *de* $G_{\mathbb{X}}(z)$ *em* $z = 0$, *pois*

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} G_{\mathbb{X}}(z)\Big|_{z=0} z^n \quad \Rightarrow \quad p[n] = \frac{G_{\mathbb{X}}^{(n)}(0)}{n!}$$

[a] Brook Taylor, matemático inglês (1685–1731).

Exemplo 1.5

Considere novamente a variável aleatória de Bernoulli do Exemplo 1.2, para a qual

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\}=p>0\ ;\ \Pr\{\mathbb{X}=0\}=1-p=q>0 \quad \Rightarrow \quad p[n]=q\delta[n]+p\delta[n-1]$$

No Exemplo 1.2, média e variância foram obtidas pela definição. Neste exemplo, a média e variância são determinadas pelas propriedades da transformada Z.

A transformada Z de $p[n]$ é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k =$$

Exemplo 1.5

Considere novamente a variável aleatória de Bernoulli do Exemplo 1.2, para a qual

$$\Pr\{\mathbb{X}=1\} = p > 0 \ ; \ \Pr\{\mathbb{X}=0\} = 1-p = q > 0 \quad \Rightarrow \quad p[n] = q\delta[n] + p\delta[n-1]$$

No Exemplo 1.2, média e variância foram obtidas pela definição. Neste exemplo, a média e variância são determinadas pelas propriedades da transformada Z.

A transformada Z de $p[n]$ é dada por

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p[k]z^k = (1-p) + zp = q + zp$$

O teste da soma é verificado, pois $G_{\mathbb{X}}(1) = q + p = 1$. O momento de primeira ordem fornece

$$\left(\frac{zd}{dz}\right) G_{\mathbb{X}}(z) = zp \quad \Rightarrow \quad \mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = p$$

Exemplo

Exemplo 1.6

e o momento de segunda ordem é dado por

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{X}}(z) = zp \implies \mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = p$$

A variância é

$$\sigma_{\mathbb{X}}^2 = p - p^2 = pq$$

A expansão em série de Taylor produz

$$G_{\mathbb{X}}(z) = q + zp \quad \Rightarrow \quad p_0 = q \quad , \quad p_1 = p$$

que confirma a expressão da transformada.

Exemplo 1.7

Considere a distribuição de probabilidade $p[n] = (1-\rho)\rho^n u[n]$, para $0 < \rho < 1$. Note que $p[n]$ é sempre maior ou igual a zero e a soma de $p[n]$ para todo n é igual a 1 (veja a Propriedade da soma geométrica). A média da variável aleatória $\mathbb{X}$ é

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n] = \mathscr{Z}\{nx[n]\}\Big|_{z=1}$$

Como

$$G_{\mathbb{X}}(z) = (1-\rho)\frac{1}{1-\rho z} = (1-\rho)(1-\rho z)^{-1} \quad , \quad |z| < \frac{1}{\rho}$$

e $1 \in \Omega_x$, tem-se

$$\left(\frac{zd}{dz}\right) G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{nx[n]\} = (1-\rho)\rho z(1-\rho z)^{-2}$$

Em $z = 1$,

Exemplo 1.8

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n] = \frac{\rho}{1-\rho}$$

O momento de segunda ordem da variável aleatória $\mathbb{X}$ é dado por

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 x[n]$$

$$\left(\frac{zd}{dz}\right)^2 G_{\mathbb{X}}(z) = \mathscr{Z}\{n^2 x[n]\} = (1-\rho)\rho\left(z(1-\rho z)^{-2} + 2\rho z^2(1-\rho z)^{-3}\right)$$

Em $z = 1$,

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} = \frac{\rho+\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

A variância de $\mathbb{X}$ é dada por

$$\mathscr{E}\{\mathbb{X}^2\} - \mathscr{E}\{\mathbb{X}\}^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Propriedade 9 (Somatória de Variáveis Aleatórias)

Se $\mathbb{X}_i$, $i = 1, \ldots, n$ são variáveis aleatórias discretas independentes e

$$\mathbb{W} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i$$

com a_i, $i = 1, \ldots, n$ constantes, então

$$G_{\mathbb{W}}(z) = \mathscr{E}\{z^{\mathbb{W}}\} = \mathscr{E}\{z^{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i}\} = G_{\mathbb{X}_1}(z^{a_1}) G_{\mathbb{X}_2}(z^{a_2}) \cdots G_{\mathbb{X}_n}(z^{a_n})$$

pois

$$\mathscr{E}\{z^{\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{X}_i}\} = \mathscr{E}\{z^{a_1 \mathbb{X}_1}\} \cdots \mathscr{E}\{z^{a_n \mathbb{X}_n}\} = \mathscr{E}\{(z^{a_1})^{\mathbb{X}_1}\} \cdots \mathscr{E}\{(z^{a_n})^{\mathbb{X}_n}\} =$$
$$G_{\mathbb{X}_1}(z^{a_1}) \cdots G_{\mathbb{X}_n}(z^{a_n})$$

Exemplo 1.9 (Soma)

Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variáveis aleatórias discretas e independentes. Então

$$G_{\mathbb{X}+\mathbb{Y}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z)$$

ou seja, a transformada Z da soma de variáveis aleatórias independentes é o produto das transformadas Z.

Exemplo 1.10 (Subtração)

Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ variáveis aleatórias discretas e independentes. Então

$$G_{2\mathbb{X}-\mathbb{Y}}(z) = G_{\mathbb{X}}(z^2)G_{\mathbb{Y}}(z^{-1})$$

A propriedade seguinte mostra que a distribuição de probabilidade associada ao produto de duas transformadas Z é a convolução das distribuições individuais.

Propriedade 10

Sejam

$$G_{\mathbb{X}}(z) = \sum_k x[k]z^k \quad , \quad G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k y[k]z^k$$

Então,

$$G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k p[k]z^k \quad \Rightarrow \quad p[n] = \sum_k x[k]y[n-k] = x[n] * y[n]$$

pois

$$G_{\mathbb{X}}(z)G_{\mathbb{Y}}(z) = \sum_k x[k]z^k \sum_m y[m]z^m = \sum_k \sum_m x[k]y[m]z^{k+m} = \sum_n \underbrace{\sum_k x[k]y[n-k]}_{p[n]} z^n$$

Exercício

A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é

$$\mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{2z^2 + z^3}{3(2-z)^3} \quad , \quad |z| < 2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ b) A média de $\mathbb{X}$

Exercício

A transformada Z da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta é

$$\mathscr{E}\{z^{\mathbb{X}}\} = \sum_k z^k \Pr\{\mathbb{X} = k\} = \frac{2z^2 + z^3}{3(2-z)^3} \quad , \quad |z| < 2$$

Determine: a) $\Pr\{\mathbb{X} = 1\}$ b) A média de $\mathbb{X}$

Solução:

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{4z + 3z^2}{3(2-z)^3} + \frac{2z^2 + z^3}{(2-z)^4} \quad \Rightarrow \quad p[1] = 0 \ , \ \mathscr{E}\{\mathbb{X}\} = \frac{16}{3}$$