IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 11: Controladores Dinâmicos

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2021

Tópicos

Realimentação dinâmica de saída

- Considere o sistema linear contínuo no tempo livre de incertezas

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\
z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\
y &= C_2 x + D_{21} w
\end{aligned}
\tag{1}
$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^r$ uma entrada externa, $z \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência, $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida e $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle.

Problema

Determine um controlador por realimentação de saída

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y, \qquad x_c \in \mathbb{R}^{n_c} \\
u &= C_c x_c + D_c y
\end{aligned}
\tag{2}
$$

que estabilize o sistema (1) e eventualmente atenda algum critério de desempenho.

Sistema em malha fechada

- Como a entrada do sistema (1) é a saída do controlador (2) e a entrada do controlador é a saída do sistema, tem-se o seguinte sistema em malha fechada

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}}_{B_{cl}} w, \\
z &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c \end{bmatrix}}_{C_{cl}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{bmatrix}}_{D_{cl}} w
\end{aligned}
\tag{3}
$$

- A determinação das matrizes do controlador A_c, B_c, C_c e D_c pode ser feita aplicando as condições de análise e critérios de desempenho no sistema em malha fechada.

- De imediato, as desigualdades de Lyapunov resultantes são não-lineares pois o produto entre a matrix dinâmica do sistema em malha fechada e a matriz de Lyapunov gera **produto de variáveis**.

- Obter desigualdades equivalentes na forma de LMIs não é uma tarefa trivial.

Controle $\mathscr{H}_2$

- Seja $H_{wz}(s) = C_{cl}(s\mathbf{I} - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl}$ a função de transferência da entrada w para a saída z do sistema (3). Um controlador estabilizante com desempenho baseado na norma $\mathscr{H}_2$ pode ser determinado pelo seguinte lema.

Lema 1

A matriz A_{cl} é Hurwitz e $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \rho^2$ se e somente se existirem matrizes $0 < W' = W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e $Z' = Z \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tais que $\rho^2 > \mathrm{Tr}(Z)$ e

$$Z > C_{cl}WC_{cl}', \tag{4}$$

$$A_{cl}W + WA_{cl}' + B_{cl}B_{cl}' < \mathbf{0} \tag{5}$$

- As desigualdades (4) e (5) são não lineares nas variáveis de decisão W e as matrizes do controlador.

- Surpreendentemente, no caso $n_c = n$ (controlador de ordem completa) as desigualdades podem ser linearizadas por meio de transformações de congruência e mudança de variáveis.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Transformação de congruência

- Aplicando o complemento de Schur nas desigualdades (4) e (5) e lembrando que a matriz de saída do sistema em malha fechada deve ser nula para que a norma $\mathscr{H}_2$ seja finita, tem-se

$$\begin{bmatrix} A_{cl}W + WA_{cl}' & B_{cl} \\ B_{cl}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} Z & C_{cl}W \\ WC_{cl}' & W \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad D_{cl} = \mathbf{0}$$

Considere as seguintes transformações de congruência

$$\begin{bmatrix} T' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{cl}W + WA_{cl}' & B_{cl} \\ B_{cl}' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'A_{cl}WT + T'WA_{cl}'T & T'B_{cl} \\ B_{cl}'T & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z & C_{cl}W \\ WC_{cl}' & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & C_{cl}WT \\ T'WC_{cl}' & T'WT \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

sendo T uma matriz a ser determinada. Condições LMIs podem ser obtidas caso seja possível encontrar uma matriz T que coloque os termos

$$T'A_{cl}WT, \qquad C_{cl}WT, \qquad T'B_{cl},$$

como expressões afins nas variáveis de decisão.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Transformação de congruência

- Definindo as partições da matriz Lyapunov (e sua inversa) e uma matriz de transformação T associada

$$W = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix}, \qquad W^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y \\ \mathbf{0} & V' \end{bmatrix}$$

têm-se as seguintes relações (termos em vermelho são não lineares)

$$\begin{aligned}
WT &= \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ U & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
T'AWT &= \begin{bmatrix} AX + B_2(C_cU + D_cC_2X) & A + B_2D_cC_2 \\ \Psi & YA + (VB_c + YB_2D_c)C_2 \end{bmatrix} && (6) \\
CWT &= \begin{bmatrix} C_1X + D_{12}(C_cU + D_cC_2X) & C_1 + D_{12}D_cC_2 \end{bmatrix}, && (7) \\
T'B &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2D_cD_{21} \\ YB_1 + (VB_c + YB_2D_c)D_{21} \end{bmatrix}, && (8) \\
T'WT &= \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Y \end{bmatrix} && (9)
\end{aligned}$$

com $\Psi = VA_cU + YAX + VB_cC_2X + YB_2C_cU + YB_2D_cC_2X$.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Mudança de variáveis

- As seguintes mudanças de variáveis

$$\begin{aligned} R &= D_c, \\ L &= C_c U + D_c C_2 X, \\ F &= V B_c + Y B_2 D_c, \\ Q &= V A_c U + Y A X + V B_c C_2 X + Y B_2 C_c U + Y B_2 D_c C_2 X \end{aligned} \tag{10}$$

transformam as equações (6)-(9) em

$$\begin{aligned} T' A W T &= \begin{bmatrix} AX + B_2 L & A + B_2 R C_2 \\ Q & YA + F C_2 \end{bmatrix} \\ C W T &= \begin{bmatrix} C_1 X + D_{12} L & C_1 + D_{12} R C_2 \end{bmatrix}, \\ T' B &= \begin{bmatrix} B_1 + B_2 R D_{21} \\ Y B_1 + F D_{21} \end{bmatrix}, \\ T' W T &= \begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que são afins nas variáveis de decisão Q, L, F e R.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Recuperação do controlador

- As mudanças de variáveis dadas em (10) podem ser colocadas na seguinte forma compacta:

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2X & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- No caso de U e V quadradas ($n_c = n$), a transformação é invertível se U e V são não singulares, levando a

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

- A necessidade de U e V serem não singulares pode ser vista a partir das seguintes relações

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Y \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V' & \hat{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \hat{X} \end{bmatrix},$$

Controle $\mathscr{H}_2$ - Otimização SDP

Teorema 1

Seja $n_c = n$. A matriz A_{cl} é Hurwitz e $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \rho^2$ se e somente se existirem matrizes $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times q}$ e $Z = Z' \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tais que as seguintes restrições SDP são satisfeitas

$$\rho^2 > \mathrm{Tr}(Z),$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + B_2L + L'B_2' & A + B_2RC_2 + Q' & B_1 + B_2RD_{21} \\ \star & A'Y + YA + FC_2 + C_2'F' & YB_1 + FD_{21} \\ \star & \star & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} Z & C_1X + D_{12}L & C_1 + D_{12}RC_2 \\ \star & X & \mathbf{I}_n \\ \star & \star & Y \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \qquad D_{11} + D_{12}RD_{21} = \mathbf{0}.$$

Nesse caso,

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0}_{n\times q} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$$

e U e V são tais que $YX + VU = \mathbf{I}$.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Comentários

Comentários

- Minimizando o valor de ρ^2 sob as restrições do Teorema 1 tem-se controlador ótimo $\mathscr{H}_2$ de ordem completa por realimentação dinâmica de saída.
- A restrição de igualdade pode administrada pelo par Yalmip/SeDuMi.
- As matrizes U e V não aparecem nas LMIs, somente na recuperação das matrizes do controlador.
- Número de linhas LMIs envolvidas no problema de otimização: $4n+r+2p$.
- Dos elementos $(1,1)$ e $(2,2)$ do lado esquerdo da segunda restrição do Teorema 1 percebe-se que a estabilizabilidade do par (A,B_2) e a detectabilidade do par (A,C_2) são condições necessárias para existência de uma solução factível.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Dual

Teorema 2

Seja $n_c = n$. A matriz A_{cl} é Hurwitz e $\|H_{wz}(s)\|_2^2 < \rho^2$ se e somente se existirem matrizes $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times q}$ e $Z = Z' \in \mathbb{R}^{r\times r}$ tais que as seguintes restrições SDP são satisfeitas

$$\rho^2 > \mathrm{Tr}(Z),$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + B_2L + L'B_2' & A + B_2RC_2 + Q' & XC_1' + L'D_{12}' \\ \star & A'Y + YA + FC_2 + C_2'F' & C_1' + C_2'R'D_{12}' \\ \star & \star & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} Z & B_1' + D_{21}'R'B_2' & B_1'Y + D_{21}'F' \\ \star & X & \mathbf{I}_n \\ \star & \star & Y \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \qquad D_{11} + D_{12}RD_{21} = \mathbf{0}.$$

Nesse caso,

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0}_{n\times q} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$$

e U e V são tais que $YX + VU = \mathbf{I}$.

Controle $\mathscr{H}_\infty$

- Um controlador estabilizante com desempenho baseado na norma $\mathscr{H}_\infty$ pode ser determinado a partir do seguinte lema.

Lema 2

A matriz A_{cl} é Hurwitz e $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma^2$ se e somente se existir uma matriz $0 < W' = W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} A_{cl}'W + WA_{cl} & WB_{cl} & C_{cl}' \\ \star & -\gamma^2\mathbf{I}_r & D_{cl}' \\ \star & \star & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{11}$$

- Aplicando as transformações de congruência e mudanças de variáveis apresentadas no caso $\mathscr{H}_2$, também é possível encontrar uma parametrização afim nas variáveis de decisão.

- Note que não aparece a restrição de igualdade no caso $\mathscr{H}_\infty$.

Controle $\mathscr{H}_\infty$ - Condições LMIs

Teorema 3

Seja $n_c = n$. A matriz A_{cl} é Hurwitz e $\|H_{wz}(s)\|_\infty^2 < \gamma^2$ se e somente se existirem matrizes $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y = Y' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m\times q}$ tais que as seguintes LMIs são satisfeitas

$$\begin{bmatrix} AX + XA' + B_2L + L'B_2' & A + B_2RC_2 + Q' & B_1 + B_2RD_{21} & XC_1' + L'D_{12}' \\ \star & A'Y + YA + FC_2 + C_2'F' & YB_1 + FD_{21} & C_1' + C_2'R'D_{12}' \\ \star & \star & -\gamma^2\mathbf{I}_r & D_{11}' + D_{21}'R'D_{12}' \\ \star & \star & \star & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} X & \mathbf{I}_n \\ \star & Y \end{bmatrix} > \mathbf{0}.$$

Nesse caso,

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0}_{m\times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q - YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0}_{n\times q} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$$

e U e V são tais que $YX + VU = \mathbf{I}$.

Sistemas Discretos

- Considere o sistema linear discreto no tempo livre de incertezas

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{12}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^r$ uma entrada externa, $z \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência, $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida e $u \in \mathbb{R}^m$ a entrada de controle.

Problema

Determine um controlador por realimentação de saída

$$\begin{aligned} x_c(k+1) &= A_c x_c + B_c y, \qquad x_c \in \mathbb{R}^{n_c} \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \tag{13}$$

que estabilize o sistema (1) e eventualmente atenda algum critério de desempenho.

Controle $\mathscr{H}_2$ com variável de folga

- Seja $H_{wz}(\xi) = C_{cl}(\xi\mathbf{I} - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl}$ a função de transferência da entrada w para a saída z do sistema (3) e ξ o operador deslocamento. Um controlador estabilizante com desempenho baseado na norma $\mathscr{H}_2$ pode ser determinado a partir do seguinte lema.

Lema 3

A matriz A_{cl} é Schur e $\|H_{wz}(\xi)\|_2^2 < \rho^2$ se e somente se existirem matrizes $W' = W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Z' = Z \in \mathbb{R}^{p\times p}$ e $G \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que $\rho^2 > \mathrm{Tr}(Z)$ e

$$\begin{bmatrix} Z & C_{cl}G \\ G'C_{cl}' & G+G'-W \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} W & A_{cl}G & B_{cl} \\ GA_{cl}' & G+G'-W & \mathbf{0}_{2n\times r} \\ B_{cl}' & \mathbf{0}_{r\times 2n} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{15}$$

- Note que os termos não lineares são formados com a variável de folga G e não com a matrix de Lyapunov W. O procedimento de linearização também é possível nesse caso.

Controle $\mathscr{H}_2$ - Procedimento de linearização

- Diferentemente do caso contínuo, em que a matriz parametrizada era a própria matriz de Lyapunov, define-se a matriz de transformação a partir das partições da variável de folga G (e de sua inversa).

$$G = \begin{bmatrix} X & ? \\ U & ? \end{bmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} Y' & ? \\ V' & ? \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y' \\ \mathbf{0} & V' \end{bmatrix}$$

- O símbolo ? significa que esses blocos não são importantes nas transformações de congruência e mudança de variáveis (basta que G^{-1} exista). O resto do procedimento segue passos similares aos do caso contínuo.

- Transformações de congruência:

$$T' A_{cl} G T = \begin{bmatrix} AX + B_2 L & A + B_2 R C_2 \\ \Psi & YA + FC_2 \end{bmatrix},$$
$$T' B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 R D_{21} \\ YB_1 & FD_{21} \end{bmatrix},$$
$$C_{cl} G T = \begin{bmatrix} C_1 X + D_{12} L & C_1 + D_{12} R C_2 \end{bmatrix},$$

Controle $\mathscr{H}_2$ - Procedimento de linearização

$$T'WT = \begin{bmatrix} P & J \\ J' & H \end{bmatrix},$$

$$T'(G+G'-W)T = \begin{bmatrix} X+X' & \mathbf{I}+X'Y'+U'V' \\ \mathbf{I}+YX+VU & Y+Y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & J \\ J' & H \end{bmatrix}$$

com $\Psi = VA_cU + YAX + VB_cC_2X + YB_2C_cU + YB_2D_cC_2X$

- Considerando mudanças de variáveis similares às do caso contínuo:

$$\begin{bmatrix} Q & F \\ L & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ C_2X & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} X & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$S = YX + VU$$

- Note que a variável S não parece no caso contínuo, servindo para linearizar o termo não linear: $YX + VU$. A recuperação das matrizes do controlador pode ser feita pela expressão:

$$\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} & -V^{-1}YB_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q-YAX & F \\ L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{-1} & \mathbf{0} \\ -C_2XU^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Controle $\mathscr{H}_2$ - Programação SDP

Teorema 4

Seja $n_c = n$. A matriz A_{cl} é Schur e $\|H_{wz}(\xi)\|_2^2 < \rho^2$ se e somente se existirem matrizes $P = P' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que as seguintes restrições SDP são satisfeitas

$$\rho^2 > \mathrm{Tr}(Z),$$

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_2L & A + B_2RC_2 & B_1 + B_2RD_{21} \\ \star & H & Q & YA + FC_2 & YB_1 + FD_{21} \\ \star & \star & X + X' - P & \mathbf{I}_n + S' - J & \mathbf{0}_{n\times r} \\ \star & \star & \star & Y + Y' - H & \mathbf{0}_{n\times r} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} Z & C_1X + D_{12}L & C_1 + D_{12}RC_2 \\ \star & X + X' - P & \mathbf{I}_n + S' - J \\ \star & \star & Y + Y' - H \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \qquad D_{11} + D_{12}RD_{21} = \mathbf{0}.$$

Nesse caso, as matrizes do controlador podem ser recuperadas por meio da expressão (16) *e U e V são tais que $S = YX + VU$.*

Controle $\mathscr{H}_2$ – Comentários

Comentários

- O controlador ótimo $\mathscr{H}_2$ de ordem completa por realimentação dinâmica de saída pode ser calculado minimizando o valor de ρ^2 sob as restrições do Teorema 4.
- A introdução da variável de folga G não traz tantos benefícios como no caso de realimentação de estados, pelo menos para sistemas precisamente conhecidos.
- Resultados similares podem ser obtidos sem a variável de folga G, aplicando-se as técnicas de linearização diretamente na matriz de Lyapunov.

Controle $\mathscr{H}_\infty$ - Condições LMIs

Teorema 5

Seja $n_c = n$. A matriz A_{cl} é Schur e $\|H_{wz}(\xi)\|_\infty^2 < \gamma^2$ se e somente se existirem matrizes $P = P' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $H = H' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $J \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que as seguintes LMIs são satisfeitas

$$\begin{bmatrix} P & J & AX + B_2 L & A + B_2 R C_2 & B_1 + B_2 R D_{21} & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \star & H & Q & YA + FC_2 & YB_1 + FD_{21} & \mathbf{0}_{n\times p} \\ \star & \star & X + X' - P & \mathbf{I}_n + S' - J & \mathbf{0}_{n\times r} & X'C_1' + L'D_{12}' \\ \star & \star & \star & Y + Y' - H & \mathbf{0}_{n\times r} & C_1' + C_2' R' D_{12}' \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r & D_{11}' + D_{21}' R' D_{12}' \\ \star & \star & \star & \star & \star & \gamma^2 \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Nesse caso, as matrizes do controlador podem ser recuperadas por meio da expressão (16) e U e V são tais que $S = YX + VU$.

- O controlador ótimo $\mathscr{H}_\infty$ de ordem completa por realimentação dinâmica de saída pode ser calculado minimizando o valor de γ^2 sob as restrições do Teorema 5.

Controlador de ordem reduzida $n_c < n$

$n_c < n$

- No caso de controladores de ordem reduzida, a abordagem apresentada requer que a matriz

$$\begin{bmatrix} X & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & Y \end{bmatrix}$$

  não tenha posto completo. Note que a igualdade $VU = \mathbf{I} - YX$ tem o seu lado esquerdo com rank deficiente pois $V \in \mathbb{R}^{n \times n_c}$ e $U \in \mathbb{R}^{n_c \times n}$ e $n_c < n$. Uma das maneiras de tratar esse problema é impor a restrição

$$rank(YX - \mathbf{I}) = n_c$$

  nas condições apresentadas, tornando-as não convexas.
- No caso $n_c = 0$ (controlador estático) tem-se diretamente a restrição $X = Y^{-1}$.
- Outra abordagem para obter controladores de ordem reduzida é impor restrições de estrutura nas variáveis do problema, similarmente ao caso de controle descentralizado em realimentação de estados.

Controle robusto

Sistemas com incertezas politópicas

- Para sistemas lineares com incertezas, a abordagem apresentada não permite uma extensão imediata para o cômputo de controladores robustos por realimentação dinâmica de saída, pois as matrizes do controlador dependem das matrizes da planta.
- Existem outras abordagens similares na literatura que permitem o cômputo de controladores robustos quando somente algumas matrizes da planta apresentam incertezas.
- No caso de sistemas variantes no tempo cujos parâmetros são lidos em tempo real é possível usar a abordagem proposta para projetar controladores dependentes de parâmetros (*gain-scheduling*).

Controle robusto → Alternativa

- O sistema em malha fechada (3) pode ser reescrito na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix}}_{\widetilde{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_2 \\ \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{B}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_c} \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{C}_2} \Bigg) \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$+ \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0}_{n_c \times r} \end{bmatrix}}_{\widetilde{B}_1} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_2 \\ \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_{21} \end{bmatrix} \Bigg) w$$

$$z = \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{C}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix}}_{\widetilde{D}_{12}} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_c} \\ C_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Bigg) \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$+ \Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} \end{bmatrix}}_{\widetilde{D}_{11}} + \begin{bmatrix} 0 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ D_{21} \end{bmatrix}}_{\widetilde{D}_{21}} \Bigg) w$$

- As matrizes A_c, B_c, C_c e D_c do controlador podem ser obtidas como solução do problema de realimentação estática de saída.

Controle robusto → Alternativa

Vantagens

Essa abordagem traz inúmeras vantagens em relação ao método de transformações de congruência:

- Extensão imediata para tratar incertezas politópicas nas matrizes do sistema, inclusive na matriz C_2;
- Controle robusto;
- Ordem reduzida;
- Uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

Referências

Fontes

- Tese de Doutorado: *Controle de sistemas lineares baseado nas desigualdades matriciais lineares*, Maurício C. de Oliveira, FEEC-UNICAMP, Maio de 1999.
- Artigo: *Extended $\mathscr{H}_2$ and $\mathscr{H}_\infty$ norm characterizations and controller parameterizations for discrete-time systems*, International Journal of Control, 75(9):666–679, 2002.
- Página do Curso: MAE 280B - Linear Control Design, `http://maecourses.ucsd.edu/~mdeolive/mae280b/`

Controlador Dinâmico na literatura

Outros condições

Procedimentos baseados no Lema da Projeção para obter condições LMIs para o projeto do controlador, no caso precisamente conhecido, podem ser encontrados por exemplo em

- T. Iwasaki and R. E. Skelton. All controllers for the general H-infinity control problem: LMI existence conditions and state-space formulas. Automatica, 30(8):1307–1317, August 1994;
- P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to H-infinity control. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 4(4):412–448, July-August 1994.

Ordem reduzida

O problema é não convexo!