IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 9: Filtragem

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2021

Tópicos

Filtragem de sistemas dinâmicos

- Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \delta[x] &= Ax + B_1 w \\ z &= C_1 x + D_{11} w \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{1}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B_1 \in \mathbb{R}^{n\times r},\ C_1 \in \mathbb{R}^{p\times n},\ D_{11} \in \mathbb{R}^{p\times r},\ C_2 \in \mathbb{R}^{q\times n},\ D_{21} \in \mathbb{R}^{q\times r}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $w \in \mathbb{R}^r$ uma entrada externa (ruído), $z \in \mathbb{R}^p$ a saída de referência e $y \in \mathbb{R}^q$ a saída medida. O operador $\delta[x]$ representa derivada (sistemas contínuos) ou deslocamento (sistemas discretos).

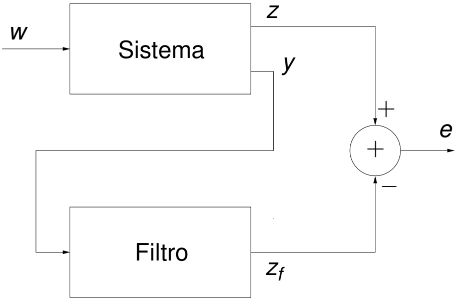
Problema: Determinar um filtro de ordem completa, linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned} \delta[x_f] &= A_f x_f + B_f y, \\ z_f &= C_f x_f + D_f y \end{aligned} \tag{2}$$

$$A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}, \quad C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$$

em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $n_f = n$, é o estado estimado e $z_f \in \mathbb{R}^p$ a saída estimada, que seja assintoticamente estável e minimize alguma medida de desempenho, como por exemplo, a norma $\mathscr{H}_2$ ou $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para o erro $e = z - z_f$.

Problema de filtragem



Definindo o sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \delta[x] \\ \delta[x_f] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} w$$

$$e = \begin{bmatrix} C_1 - D_f C_2 & -C_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix} + [D_{11} - D_f D_{21}]\, w$$

Problema de filtragem

- De forma compacta, tem-se $\tilde{x}' = \begin{bmatrix} x' & x_f' \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \delta[\tilde{x}] &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w \\ e &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}w \end{aligned} \tag{3}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C_2 & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_f D_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times r}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 - D_f C_2 & -C_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times 2n}, \quad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11} - D_f D_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times r}$$

Obtendo as matrizes do filtro

- Condições de estabilidade com critérios $\mathscr{H}_2$ ou $\mathscr{H}_\infty$ podem ser impostas ao sistema aumentado;
- Por meio de manipulações (transformações de congruência, mudanças de variáveis), pode-se eliminar as não-linearidades envolvendo as matrizes do filtro (A_f, B_f, C_f, D_f) e as matrizes de Lyapunov (e eventuais variáveis extras) utilizadas para certificar a estabilidade com desempenho $\mathscr{H}_2$ ou $\mathscr{H}_\infty$.

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Considerando $D_{11} = \mathbf{0}$ e $D_f = \mathbf{0}$ (para garantir norma $\mathscr{H}_2$ finita), o problema se resume à determinação de uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, de matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $\rho > 0$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2 \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} > 0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' \\ \tilde{C} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0 \tag{6}$$

A matriz $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e sua inversa P^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$PP^{-1} = \mathbf{I}_{2n} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} XY + U'V = \mathbf{I}_n, & XV' + U'\tilde{Y} = \mathbf{0} \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = \mathbf{I}_n, & UY + \tilde{X}V = \mathbf{0} \end{cases}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Definindo as matrizes não singulares

$$S = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I}_n \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \tag{8}$$

com inversas

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ \mathbf{I}_n & -YV^{-1} \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

tem-se

$$S'PS = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & X \end{bmatrix}, \quad R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} \quad , \quad Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Multiplicando a equação (5) à esquerda por diag($R^{-1}S', \mathbf{I}_r$) e à direita por diag($SR^{-1}, \mathbf{I}_r$), tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0_{2n\times r} \\ 0_{r\times 2n} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0_{2n\times r} \\ 0_{r\times 2n} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'P\tilde{B} \\ \tilde{B}'PSR^{-1} & M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & Y^{-1}B_1 \\ Y^{-1} & X & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X + D_{21}'B_f'U & M \end{bmatrix} \tag{9}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Resultando na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1' Z & B_1' X + D_{21}' L' & M \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

que é equivalente a (5), com $L = U' B_f$. De maneira similar, multiplicando a equação (6) à esquerda por diag$(R^{-1}S', \mathbf{I}_p)$ e à direita por diag$(SR^{-1}, \mathbf{I}_p)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0_{2n\times p} \\ 0_{p\times 2n} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' \\ \tilde{C} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0_{2n\times p} \\ 0_{p\times 2n} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R^{-1}S'\tilde{A}'PSR^{-1} + R^{-1}S'P\tilde{A}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ \tilde{C}SR^{-1} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{matrix} A'Y^{-1} + Y^{-1}A & A'X + Y^{-1}A + C_2'B_f'U + Y^{-1}V'A_f'U \\ XA + A'Y^{-1} + U'B_fC_2 + U'A_fVY^{-1} & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 \\ C_1 - C_fVY^{-1} & C_1 \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} C_1' - Y^{-1}V'C_f' \\ C_1' \\ -\mathbf{I}_p \end{matrix} \right]$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} A'Z+ZA & A'X+ZA+C_2'B_f'U+ZV'A_f'U & C_1'-ZV'C_f' \\ XA+A'Z+U'B_fC_2+U'A_fVZ & A'X+XA+C_2'B_f'U+U'B_fC_2 & C_1' \\ C_1-C_fVZ & C_1 & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

Além disso, definindo

$$L = U'B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}, \quad G = U'A_fVZ \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad F = C_fVZ \in \mathbb{R}^{p\times n} \tag{11}$$

tem-se a condição equivalente a (6):

$$\begin{bmatrix} A'Z+ZA & A'X+ZA+C_2'L'+G' & C_1'-F' \\ XA+A'Z+LC_2+G & A'X+XA+C_2'L'+LC_2 & C_1' \\ C_1-F & C_1 & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

Finalmente, note que

$$P > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{13}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

Lema 1

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido dado por ρ se e somente se existirem matrizes $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2$,

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \qquad (14)$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0 \qquad (15)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad C_f = F(VZ)^{-1} \qquad (16)$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

Comentários

- Note que as partições U e V são obtidas a partir da identidade

$$XY + U'V = \mathbf{I} \tag{17}$$

  e, como $Z > 0$ e $X - Z > 0$, existem U e V não singulares solução de (17).
- A restrição $P > 0$ (equação (13)) já aparece no bloco 2×2 superior esquerdo de (14);
- As transformações de equivalência valem nos dois sentidos, ou seja, o Lema 1 apresenta condições convexas necessárias e suficientes para a existência de um filtro ótimo $\mathscr{H}_2$ de ordem completa;
- O problema deixa de ser convexo se $n_f < n$ (filtro de ordem reduzida).

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa I

- É possível linearizar as desigualdades dadas em (5) e (6) utilizando uma abordagem alternativa, que não explora a igualdade $PP^{-1} = \mathbf{I}_{2n}$. Com a estrutura de P definida em (7), tem-se que (5) é dada por

$$\begin{bmatrix} X & U' & XB_1 + U'B_f D_{21} \\ \star & \tilde{X} & UB_1 + \tilde{X}B_f D_{21} \\ \star & \star & M \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Aplicando a transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U'\tilde{X}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' & XB_1 + U'B_f D_{21} \\ \star & \tilde{X} & UB_1 + \tilde{X}B_f D_{21} \\ \star & \star & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{X}^{-1}U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} X & U'\tilde{X}^{-1}U & XB_1 + U'B_f D_{21} \\ \star & U'\tilde{X}^{-1}U & U'\tilde{X}^{-1}UB_1 + U'B_f D_{21} \\ \star & \star & M \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa II

Agora substituindo a definição de P na condição do gramiano dada em (6), tem-se

$$\begin{bmatrix} XA + A'X' + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & A'U' + U'A_f + C_2'B_f'\tilde{X}' & C_1' \\ \star & \tilde{X}A_f + A_f'\tilde{X}' & -C_f' \\ \star & \star & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

Multiplicando a desigualdade anterior por T' à esquerda e por T à direita, com

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{X}^{-1}U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} XA + A'X' + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & A'U'\tilde{X}^{-1}U + U'A_f\tilde{X}^{-1}U + C_2'B_f'U & C_1' \\ \star & U'A_f\tilde{X}^{-1}U + U'\tilde{X}^{-1}A_f'U & -U'\tilde{X}^{-1}C_f' \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa III

Finalmente, adotam-se as seguintes mudanças de variáveis

$$W = U'\tilde{X}^{-1}U, \quad G = U'A_f\tilde{X}^{-1}U, \quad L = U'B_f, \quad F = C_f\tilde{X}^{-1}U$$

Note que aplicando o complemento de Schur na restrição $P > 0$, tem-se

$$X - U'\tilde{X}^{-1}U > \mathbf{0}, \quad \tilde{X} > \mathbf{0}$$

que, usando uma das mudanças de variáveis propostas, fornece $X - W > \mathbf{0}$ e $W > \mathbf{0}$.

- Neste momento é importante observar que a matriz U associada à matriz de Lyapunov P sempre pode ser assumida não singular (invertível) sem perda de generalidade. Suponha que a solução ótima P do problema de otimização é tal que U seja singular (rank incompleto). Sejam as matrizes

$$Q = P + \beta W, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

sendo que β é um escalar positivo. Como $P > 0$, tem-se que $Q > 0$ para β positivo e próximo de zero. Assim, escolhendo $\beta > 0$ arbitrariamente pequeno, tem-se que

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa IV

Q_2 será não singular e as desigualdades do problema de otimização serão satisfeitas com P substituída por Q, e a função objetivo (4) será aumentada de um valor incremental arbitrariamente pequeno (proporcional a β). Como nesse caso Q_2 é não singular, podemos assumir sem perda de generalidade que U será não singular.

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa V

Lema 2

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido dado por ρ se e somente se existirem matrizes $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $W = W' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tais que $\mathbf{Tr}(M) \le \rho^2$, $X - W > \mathbf{0}$,

$$\begin{bmatrix} X & W & XB_1 + LD_{21} \\ \star & W & WB_1 + LD_{21} \\ \star & \star & M \end{bmatrix} > \mathbf{0} \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} XA + A'X' + C_2'L' + LC_2 & A'W + G + C_2'L' & C_1' \\ \star & G + G' & -F' \\ \star & \star & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}GU^{-1}\tilde{X}, \quad C_f = FU^{-1}\tilde{X} \tag{20}$$

em que $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\tilde{X} = \tilde{X}' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ são matrizes tais que $W = U'\tilde{X}^{-1}U$.

Filtro $\mathscr{H}_2$ – Linearização alternativa VI

- A determinação das matrizes do filtro em (20) pode ser simplificada. Perceba que a partir da relação $W = U'\tilde{X}^{-1}U$, temos que $W^{-1}U' = U^{-1}\tilde{X}$. Usando essa última igualdade, as matrizes do filtro podem ser recuperadas pelas novas relações

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}GW^{-1}U', \quad C_f = FW^{-1}U'$$

que fornecem a seguinte representação de estados para o filtro

$$\begin{aligned} \dot{x}_f &= (U')^{-1}GW^{-1}U'x_f + U'^{-1}Ly \\ z_f &= FW^{-1}U'x_f \end{aligned}$$

Note que U' pode ser vista como uma transformação de similaridade na representação de estado do filtro, não alterando a função de transferência da entrada y para a saída z_f. Assim, podemos escolher, por exemplo, $U' = \mathbf{I}$ e as matrizes do filtro (ainda ótimo) podem ser construídas pelas fórmulas simplificadas

$$B_f = L, \quad A_f = GW^{-1}, \quad C_f = FW^{-1}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- Um custo garantido $\mathscr{H}_2$ dado por $\rho > 0$ pode ser obtido das condições duais, ou seja, pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ e $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2 \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} W & W\tilde{C}' \\ \tilde{C}W & M \end{bmatrix} > 0 \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}W + W\tilde{A}' & \tilde{B} \\ \tilde{B}' & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \tag{23}$$

A matriz $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e sua inversa W^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$W = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}$$

implicando nas relações $W^{-1}W = \mathbf{I}_{2n}$

$$XY + U'V = \mathbf{I}_n, \quad XV' + U'\tilde{Y} = 0$$

$$UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = \mathbf{I}_n, \quad UY + \tilde{X}V = 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- Definindo as matrizes não singulares S e R como em (8), tem-se

$$R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

com $Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Multiplicando a equação (22) à esquerda por diag$(R^{-1}S'W^{-1}, \mathbf{I}_p)$ e à direita por diag$(W^{-1}SR^{-1}, \mathbf{I}_p)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ \tilde{C}SR^{-1} & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & C_1' - Y^{-1}V'C_f' \\ Y^{-1} & X & C_1' \\ C_1 - C_f VY^{-1} & C_1 & M \end{bmatrix}$$

resultando na condição equivalente a (22)

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \tag{24}$$

com $F = C_f VZ$.

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- De maneira similar, multiplicando a equação (23) à esquerda por $\mathrm{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, \mathbf{I}_r)$ e à direita por $\mathrm{diag}(W^{-1}SR^{-1}, \mathbf{I}_r)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}\tilde{A}SR^{-1} + R^{-1}S'\tilde{A}'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{B} \\ \tilde{B}'W^{-1}SR^{-1} & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A'Y^{-1} + Y^{-1}A & A'X + Y^{-1}A + C_2'B_f'U + Y^{-1}V'A_f'U & Y^{-1}B_1 \\ XA + A'Y^{-1} + U'B_fC_2 + U'A_fVY^{-1} & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X - D_{21}'B_f'U & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'B_f'U + ZV'A_f'U & ZB_1 \\ XA + A'Z + U'B_fC_2 + U'A_fVZ & A'X + XA + C_2'B_f'U + U'B_fC_2 & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X - D_{21}'B_f'U & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

com $Z = Y^{-1}$.

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

Definindo L, G e F como em (11), tem-se a condição equivalente a (23)

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

Note também que

$$W > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{26}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

Lema 3

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido dado por ρ se e somente se existirem matrizes $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2$*,*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} A'Z + ZA & A'X + ZA + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ XA + A'Z + LC_2 + G & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \tag{28}$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad C_f = F(VZ)^{-1} \tag{29}$$

Comentários

- Os mesmos comentários do Lema 1 são válidos para o Lema 3;
- A extensão tanto do Lema 1 quanto do Lema 3 para tratar o problema de filtragem robusta para sistemas politópicos com estabilidade quadrática é imediata, pois as matrizes do sistema aparecem de maneira afim nas LMIs;
- Os valores ótimos de norma $\mathscr{H}_2$ obtidos pelos métodos primal e dual são os mesmos no caso precisamente conhecido. Diferenças podem ocorrer no caso incerto, dependendo do exemplo.

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

- O *bounded real lemma* aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica $\tilde{A}$ e um limitante γ para a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e.

As condições são dadas pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e de uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que ($\star$ representa blocos simétricos nas LMIs)

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} & \tilde{C}' & P\tilde{B} \\ \star & -\mathbf{I}_p & \tilde{D} \\ \star & \star & -\gamma^2\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0_{2n+p+r} \tag{30}$$

- Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

Lema 4

Existem A_f, B_f, C_f e D_f tais que a dinâmica do erro (3) *é estável com norma $\mathscr{H}_\infty$ menor do que $\gamma > 0$ se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$ tais que*

$$\Xi \triangleq \begin{bmatrix} A'Z + ZA & ZA + A'X + C_2'L' + G' & C_1' - C_2'D_f' - F' & ZB_1 \\ \star & A'X + XA + C_2'L' + LC_2 & C_1' - C_2'D_f' & XB_1 + LD_{21} \\ \star & \star & -\mathbf{I}_p & D_{11} - D_f D_{21} \\ \star & \star & \star & -\gamma^2\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0_{2n+p+r} \qquad (31)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z \\ \star & X \end{bmatrix} > 0 \qquad (32)$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

Lema 4 (cont.)

No caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por D_f e

$$A_f = (U')^{-1} G (VZ)^{-1} \ , \ B_f = (U')^{-1} L \ , \ C_f = F(VZ)^{-1}$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = \mathbf{I} \tag{33}$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática — Prova

- Primeiramente, defina $Y^{-1} = Z$ e as matrizes particionadas

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, \; P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, \; S = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I} \\ V & 0 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{34}$$

e note que

$$R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^{-1}V' \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ VY^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

Assim, (32) é equivalente a $P > 0$.

Definindo $T = \text{diag}\{SR^{-1}, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_r\}$ e as transformações de variáveis

$$L = U'B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}, \quad G = U'A_f VZ \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad F = C_f VZ \in \mathbb{R}^{p\times n} \tag{35}$$

pode-se mostrar que Ξ dado em (31) satisfaz

$$\Xi = T'\Gamma T \tag{36}$$

com Γ definido em (30).

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática — Prova

- De fato

$$R^{-1}S'(\tilde{A}'P+P\tilde{A})SR^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^{-1}V' \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_fC_2 & A_f \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_fC_2 & A_f \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ VY^{-1} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A'Y^{-1}+Y^{-1}A & A'X+Y^{-1}A+C_2'B_f'U+Y^{-1}V'A_f'U \\ \star & A'X+XA+C_2'B_f'U+U'B_fC_2 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}S'\tilde{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^{-1}V' \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'-C_2'D_f' \\ -C_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1'-C_2'D_f'-Y^{-1}V'C_f' \\ C_1'-C_2'D_f' \end{bmatrix}$$

$$R^{-1}S'P\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & Y^{-1}V' \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_fD_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1}B_1 \\ XB_1+U'B_fD_{21} \end{bmatrix}$$

A equivalência (36) segue da mudança de variáveis (35) e, como conseqüência,

$$\Gamma < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Xi < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Finsler

- Determine uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$ e $\rho > 0$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2 \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} M & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & W \end{bmatrix} > 0 \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'K' + K\tilde{A} & W + \tilde{A}'E' - K & K\tilde{B} + \tilde{A}'Q' \\ W + E\tilde{A} - K' & -E - E' & E\tilde{B} - Q' \\ \tilde{B}'K' + Q\tilde{A} & \tilde{B}'E' - Q & Q\tilde{B} + \tilde{B}'Q' - \mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \tag{39}$$

De (38), por complemento de Schur, obtém-se $M > \tilde{C}W^{-1}\tilde{C}'$ e, com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0}_{2n\times r} \\ \mathbf{0}_{r\times 2n} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad \left(\text{note que} \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{2n\times(2n+r)} \right)$$

de (39) (pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S') obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'W + W\tilde{A} & W\tilde{B} \\ \tilde{B}'W & -\mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0 \quad \iff \quad W(\tilde{A}W^{-1} + W^{-1}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}')W < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Finsler (outra estratégia)

- Determine uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$, matrizes $H \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $J \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_3 \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$, $X_4 \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_6 \in \mathbb{R}^{p\times p}$, e $\rho > 0$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2 \tag{40}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}'H' + H\tilde{B} - M & \tilde{B}'J - H \\ J'\tilde{B} - H' & P - J - J' \end{bmatrix} < 0 \tag{41}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & X_4 \\ X_2 & X_5 \\ X_3 & X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \tilde{C} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}' & \tilde{C}' \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' \\ X_4' & X_5' & X_6' \end{bmatrix} < 0 \tag{42}$$

Com $T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{B}' \end{bmatrix}$, de (41) (pré-multiplicando por T e pós-multiplicando por T') obtém-se $M > \tilde{B}'P\tilde{B}$ e, com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \tilde{C}' \end{bmatrix} \quad \text{(note que } \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \tilde{C} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{(2n+p)\times 2n} \text{)}$$

de (42) (pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S') obtém-se

$$\tilde{A}'P + P\tilde{A} + \tilde{C}'\tilde{C} < 0$$

Recuperação das matrizes do filtro

Comentários

- Explorado os produtos $K\tilde{A}$, $E\tilde{A}$, impondo partições e submatrizes comuns a K e E, é possível sintetizar filtros subótimos (sem interesse no caso de sistemas precisamente conhecidos).
- Outra estratégia, também baseada em Finsler, introduz mais variáveis de folga e produtos do tipo $X_1\tilde{A}$, $X_2\tilde{A}$, $X_3\tilde{A}$, que poderiam em princípio ser explorados de maneira similar (a verificar!). Alguns ajustes de dimensão podem ser necessários.
- Formulações duais, com produtos do tipo $\tilde{A}K$, $\tilde{A}E$, aparentemente não podem ser exploradas.

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler

- Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que o erro de estimação tende assintoticamente para zero e a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e é limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existirem uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} K\tilde{A}+\tilde{A}'K' & P-K+\tilde{A}'E' & K\tilde{B}+\tilde{A}'Q' & \tilde{C}' \\ P-K'+E\tilde{A} & -E-E' & E\tilde{B}-Q' & \mathbf{0} \\ \tilde{B}'K'+Q\tilde{A} & \tilde{B}'E'-Q & \tilde{B}'Q'+Q\tilde{B}-\mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & -\gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

De fato, pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S' com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0}_{2n\times r} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \mathbf{0}_{r\times 2n} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times 2n} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & \mathbf{0}_{p\times r} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} & \mathbf{0}_{2n\times p} \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{2n\times(2n+r+p)}$$

tem-se o *bounded real lemma*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P+P\tilde{A} & P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ \tilde{B}'P & -\mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \tilde{D} & -\gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler (outra estratégia)

- Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que o erro de estimação tende assintoticamente para zero e a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e é limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existirem uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e uma matriz $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(4n+r+p)\times(2n+p)}$ tais que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \mathscr{X}\begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}' & \tilde{C}' \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0} \\ \tilde{B}' & \tilde{D}' \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix}\mathscr{X}' < 0$$

De fato, pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S' com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0} & \tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \end{bmatrix}$$

tem-se o *bounded real lemma*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}'P + P\tilde{A} + \gamma^2\tilde{C}'\tilde{C} & P\tilde{B} + \gamma^2\tilde{C}'\tilde{D} \\ \tilde{B}'P + \gamma^2\tilde{D}'\tilde{C} & \gamma^2\tilde{D}'\tilde{D} - \mathbf{I}_r \end{bmatrix} < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler

- A matriz $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(4n+r+p)\times(2n+p)}$ pode ser particionada em blocos

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ X_{41} & X_{42} \end{bmatrix}$$

com $X_{11} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

- Escolhendo estruturas particulares para essas matrizes (eventualmente zerando algumas), com mudanças de variáveis e transformações de congruência, é possível obter uma condição LMI em termos das variáveis de folga (que podem ser particionadas como P ou como W) para a determinação do filtro de ordem completa que minimiza a norma $\mathscr{H}_\infty$.

- Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Considerando $D_{11} = \mathbf{0}$ e $D_f = \mathbf{0}$ por simplicidade (poderiam ser considerados diferentes de zero, alterando o valor da norma $\mathscr{H}_2$ de uma constante), deseja-se determinar uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$ e $\rho > 0$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \le \rho^2 \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} > 0 \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} P & \tilde{A}'P & \tilde{C}' \\ P\tilde{A} & P & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0 \tag{45}$$

Como no caso contínuo, a matriz $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e sua inversa P^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$P = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}$$

$$PP^{-1} = \mathbf{I}_{2n} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} XY + U'V = \mathbf{I}_n, & XV' + U'\tilde{Y} = \mathbf{0} \\ UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = \mathbf{I}_n, & UY + \tilde{X}V = \mathbf{0} \end{cases}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Definindo as matrizes não singulares

$$S = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I}_n \\ V & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \tag{46}$$

com inversas

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & V^{-1} \\ \mathbf{I}_n & -YV^{-1} \end{bmatrix}, \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

tem-se

$$S'PS = \begin{bmatrix} Y & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & X \end{bmatrix}, \quad R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} \quad , \quad Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Multiplicando a equação (44) à esquerda por $\mathrm{diag}(R^{-1}S', \mathbf{I}_r)$ e à direita por $\mathrm{diag}(SR^{-1}, \mathbf{I}_r)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S' & 0_{2n\times r} \\ 0_{r\times 2n} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & P\tilde{B} \\ \tilde{B}'P & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SR^{-1} & 0_{2n\times r} \\ 0_{r\times 2n} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'P\tilde{B} \\ \tilde{B}'PSR^{-1} & M \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & Y^{-1}B_1 \\ Y^{-1} & X & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ B_1'Y^{-1} & B_1'X + D_{21}'B_f'U & M \end{bmatrix} \tag{47}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Resultando na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \qquad (48)$$

que é equivalente a (44), com $L = U'B_f$.

- De maneira similar, multiplicando a equação (45) à esquerda por diag$(R^{-1}S', R^{-1}S', \mathbf{I}_p)$ e à direita por diag$(SR^{-1}, SR^{-1}, \mathbf{I}_p)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'PSR^{-1} & R^{-1}S'A'PSR^{-1} & R^{-1}S'C' \\ R^{-1}S'PASR^{-1} & R^{-1}S'PSR^{-1} & \mathbf{0} \\ CSR^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0$$

Resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'B_f'U + ZV'A_f'U & C_1' - ZV'C_f' \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'B_f'U & C_1' \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

- Definindo

$$L = U'B_f, \quad G = U'A_f VZ, \quad F = C_f VZ \tag{49}$$

tem-se a condição equivalente a (45):

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'L' & C_1' \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0 \tag{50}$$

Finalmente, note que

$$P > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'PSR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{51}$$

e que essa restrição já está presente nas LMIs (48) e (50).

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática

Lema 5

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido dado por ρ se e somente se existirem matrizes $M \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2$,

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZB_1 \\ Z & X & XB_1 + LD_{21} \\ B_1'Z & B_1'X + D_{21}'L' & M \end{bmatrix} > 0 \qquad (52)$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & C_1' - F' \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'L' & C_1' \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0 \qquad (53)$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad C_f = F(VZ)^{-1} \qquad (54)$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- Um custo garantido $\mathscr{H}_2$ dado por $\rho > 0$ pode ser obtido das condições duais, ou seja, pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$ e $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que

$$\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2 \tag{55}$$

$$\begin{bmatrix} W & W\tilde{C}' \\ \tilde{C}W & M \end{bmatrix} > 0 \tag{56}$$

$$\begin{bmatrix} W & \tilde{A}W & \tilde{B} \\ W\tilde{A}' & W & \mathbf{0} \\ \tilde{B}' & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0 \tag{57}$$

A matriz $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e sua inversa W^{-1} são particionadas (em blocos n por n) da seguinte forma

$$W = \begin{bmatrix} Y & V' \\ V & \tilde{Y} \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} X & U' \\ U & \tilde{X} \end{bmatrix}$$

implicando nas relações $W^{-1}W = \mathbf{I}_{2n}$

$$XY + U'V = \mathbf{I}_n, \quad XV' + U'\tilde{Y} = 0$$
$$UV' + \tilde{X}\tilde{Y} = \mathbf{I}_n, \quad UY + \tilde{X}V = 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- Definindo as matrizes não singulares S e R como em (8), tem-se

$$R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} \\ Y^{-1} & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix}$$

com $Z = Y^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Multiplicando a equação (56) à esquerda por diag$(R^{-1}S'W^{-1}, \mathbf{I}_p)$ e à direita por diag$(W^{-1}SR^{-1}, \mathbf{I}_p)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'\tilde{C}' \\ \tilde{C}SR^{-1} & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1} & C_1' - Y^{-1}V'C_f' \\ Y^{-1} & X & C_1' \\ C_1 - C_f VY^{-1} & C_1 & M \end{bmatrix}$$

resultando na condição equivalente a (56)

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \qquad (58)$$

com $F = C_f VZ$.

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

- De maneira similar, multiplicando a equação (57) à esquerda por $\text{diag}(R^{-1}S'W^{-1}, R^{-1}S'W^{-1}, \mathbf{I}_r)$ e à direita por $\text{diag}(W^{-1}SR^{-1}, W^{-1}SR^{-1}, \mathbf{I}_r)$, tem-se

$$\begin{bmatrix} R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{A}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}\tilde{B} \\ R^{-1}S'\tilde{A}'W^{-1}SR^{-1} & R^{-1}S'W^{-1}SR^{-1} & \mathbf{0} \\ \tilde{B}'W^{-1}SR^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix}$$

Resultando (com $Z = Y^{-1}$) na condição

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'B_f'U + ZV'A_f'U & ZB_1 \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'B_f'U & XB_1 + U'B_fD_{21} \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

Definindo L, G e F como em (49), tem-se a condição equivalente a (57)

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'L' & XB_1 + LD_{21} \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0 \tag{59}$$

Note também que

$$W > 0 \Leftrightarrow R^{-1}S'W^{-1}WW^{-1}SR^{-1} = \begin{bmatrix} Z & Z \\ Z & X \end{bmatrix} > 0 \tag{60}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Estabilidade Quadrática — Dual

Lema 6

Existe um filtro de ordem completa que resolve o problema $\mathscr{H}_2$ com custo garantido dado por ρ se e somente se existirem matrizes $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $Z = Z' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X = X' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2$,

$$\begin{bmatrix} Z & Z & C_1' - F' \\ Z & X & C_1' \\ C_1 - F & C_1 & M \end{bmatrix} > 0 \tag{61}$$

$$\begin{bmatrix} Z & Z & A'Z & A'X + C_2'L' + G' & ZB_1 \\ \star & X & A'Z & A'X + C_2'L' & XB_1 + LD_{21} \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0 \tag{62}$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por

$$B_f = (U')^{-1}L, \quad A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, \quad C_f = F(VZ)^{-1} \tag{63}$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

- Assim como no caso contínuo, a versão discreta do *bounded real lemma* aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica $\tilde{A}$ e um limitante γ para a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e.

As condições são dadas pela existência de $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e de uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} P & P\tilde{A} & P\tilde{B} & \mathbf{0} \\ \tilde{A}'P & P & \mathbf{0} & \tilde{C}' \\ \tilde{B}'P & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \mathbf{0} & C & D & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0_{4n+p+r} \tag{64}$$

- Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$

Utilizando as mesmas partições para P e P^{-1}, multiplicando a LMI (64) por $\text{diag}(R^{-1}S', R^{-1}S', \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_r)$ à esquerda e por $\text{diag}(SR^{-1}, SR^{-1}, \mathbf{I}_p, \mathbf{I}_r)$ à direita chega-se à condição para a existência do filtro, expressa no próximo lema.

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

Lema 7

Existem A_f, B_f, C_f e D_f tais que a dinâmica do erro (3) *é estável com norma $\mathscr{H}_\infty$ menor do que $\gamma > 0$ se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$ tais que*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZA & ZA & ZB_1 & \mathbf{0} \\ \star & X & XA+LC_2+G & XA+LC_2 & XB_1+LD_{21} & \mathbf{0} \\ \star & \star & Z & Z & \mathbf{0} & C_1'-C_2'D_f'-F' \\ \star & \star & \star & X & \mathbf{0} & C_1'-C_2'D_f' \\ \star & \star & \star & \star & \mathbf{I}_r & D_{11}'-D_{21}'D_f' \\ \star & \star & \star & \star & \star & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0_{4n+p+r} \qquad (65)$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Estabilidade Quadrática

Lema 7 (cont.)

No caso afirmativo, as matrizes do filtro são dadas por D_f e

$$A_f = (U')^{-1}G(VZ)^{-1} \ , \ B_f = (U')^{-1}L \ , \ C_f = F(VZ)^{-1}$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = \mathbf{I} \tag{66}$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Finsler

- Determine uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$ e $\rho > 0$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \leq \rho^2$

$$\begin{bmatrix} M & \tilde{C} \\ \tilde{C}' & W \end{bmatrix} > 0 \tag{67}$$

$$\begin{bmatrix} W + \tilde{A}'K' + K\tilde{A} & \tilde{A}'E' - K & K\tilde{B} + \tilde{A}'Q' \\ E\tilde{A} - K' & -W - E - E' & E\tilde{B} - Q' \\ \tilde{B}'K' + Q\tilde{A} & \tilde{B}'E' - Q & Q\tilde{B} + \tilde{B}'Q' + \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0 \tag{68}$$

De (67), por complemento de Schur obtém-se $M > \tilde{C}W^{-1}\tilde{C}'$ e, com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0}_{2n\times r} \\ \mathbf{0}_{r\times 2n} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad \text{(note que} \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{2n\times(2n+r)} \text{)}$$

de (68) (pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S') obtém-se

$$\begin{bmatrix} W - \tilde{A}'W\tilde{A} & -\tilde{A}'W\tilde{B} \\ -\tilde{B}'W\tilde{A} & \mathbf{I}_r - \tilde{B}'W\tilde{B} \end{bmatrix} > 0 \iff \begin{bmatrix} W & \tilde{A}'W & \mathbf{0} \\ W\tilde{A} & W & W\tilde{B} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}'W & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} > 0$$

Filtro $\mathscr{H}_2$ — Finsler (outra estratégia)

- Determine uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $A_f \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{p\times p}$, matrizes $H \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $J \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_1 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_3 \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$, $X_4 \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_5 \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_6 \in \mathbb{R}^{r\times r}$, e $\rho > 0$ tais que $\mathbf{Tr}(M) \le \rho^2$

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}'H' + H\tilde{B} - M & \tilde{B}'J - H \\ J'\tilde{B} - H' & P - J - J' \end{bmatrix} < 0 \tag{69}$$

$$\begin{bmatrix} P & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 & X_4 \\ X_2 & X_5 \\ X_3 & X_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \tilde{C} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}' & \tilde{C}' \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' \\ X_4' & X_5' & X_6' \end{bmatrix} > 0 \tag{70}$$

Com $T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \tilde{B}' \end{bmatrix}$, de (69) (pré-multiplicando por T e pós-multiplicando por T') obtém-se $M > \tilde{B}'P\tilde{B}$ e, com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \tilde{C}' \end{bmatrix} \quad \text{(note que } \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \tilde{C} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{(2n+p)\times 2n} \text{)}$$

de (70) (pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S') obtém-se

$$\tilde{A}'P\tilde{A} - P + \tilde{C}'\tilde{C} < 0$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler

- Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que o erro de estimação tende assintoticamente para zero e a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e é limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $Q \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W + K\tilde{A} + \tilde{A}'K' & -K + \tilde{A}'E' & K\tilde{B} + \tilde{A}'Q' & \tilde{C}' \\ -K' + E\tilde{A} & -W - E - E' & E\tilde{B} - Q' & \mathbf{0} \\ \tilde{B}'K' + Q\tilde{A} & \tilde{B}'E' - Q & \tilde{B}'Q' + Q\tilde{B} + \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0$$

De fato, pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S' com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0}_{2n\times r} & \mathbf{0}_{2n\times p} \\ \mathbf{0}_{r\times 2n} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r & \mathbf{0}_{r\times p} \\ \mathbf{0}_{p\times 2n} & \mathbf{0}_{p\times 2n} & \mathbf{0}_{p\times r} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} & \mathbf{0}_{2n\times p} \end{bmatrix} S' = \mathbf{0}_{2n\times(2n+r+p)}$$

tem-se o *bounded real lemma*

$$\begin{bmatrix} W & \tilde{A}'W & \mathbf{0} & \tilde{C}' \\ W\tilde{A} & W & W\tilde{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}'W & \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler (outra estratégia)

- Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que o erro de estimação tende assintoticamente para zero e a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e é limitada por $\gamma > 0$ se e somente se existirem uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e uma matriz $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(4n+r+p)\times(2n+p)}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -W & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \mathscr{X} \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\mathbf{I}_{2n} & \tilde{B} & \mathbf{0} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}' & \tilde{C}' \\ -\mathbf{I}_{2n} & \mathbf{0} \\ \tilde{B}' & \tilde{D}' \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \mathscr{X}' > 0$$

De fato, pré-multiplicando por S e pós-multiplicando por S' com

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2n} & \tilde{A}' & \mathbf{0} & \tilde{C}' \\ \mathbf{0} & \tilde{B}' & \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \end{bmatrix}$$

tem-se o *bounded real lemma*

$$\begin{bmatrix} W & \tilde{A}'W & \mathbf{0} & \tilde{C}' \\ W\tilde{A} & W & W\tilde{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{B}'W & \mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & \gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} > 0$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ — Finsler

- Como no caso contínuo, a matriz $\mathscr{X} \in \mathbb{R}^{(4n+r+p)\times(2n+p)}$ pode ser particionada em blocos
$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \\ X_{41} & X_{42} \end{bmatrix}$$
com $X_{11} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_{12} \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_{21} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $X_{22} \in \mathbb{R}^{2n\times p}$, $X_{31} \in \mathbb{R}^{r\times 2n}$, $X_{32} \in \mathbb{R}^{r\times p}$, $X_{41} \in \mathbb{R}^{p\times 2n}$, $X_{42} \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

- Escolhendo estruturas particulares para essas matrizes (eventualmente zerando algumas), com mudanças de variáveis e transformações de congruência, é possível obter uma condição LMI em termos das variáveis de folga (que podem ser particionadas como P ou como W) para a determinação do filtro de ordem completa que minimiza a norma $\mathscr{H}_\infty$.

- Condições equivalentes podem ser obtidas com o sistema dual $(\tilde{A}', \tilde{C}', \tilde{B}', \tilde{D}')$

Extensões para filtragem robusta

Comentários

- Estratégias baseadas nas subpartições das matrizes de P e W podem ser utilizadas para a determinação de filtros robustos baseados na estabilidade quadrática. Para isso, basta considerar as LMIs nos vértices do sistema;
- Estratégias baseadas nas subpartições das matrizes de folga K e E podem ser utilizadas para a determinação de filtros robustos certificados por funções de Lyapunov afins. Para isso, basta considerar as LMIs nos vértices do sistema, cada qual com uma matriz de Lyapunov;
- Uma outra estratégia consiste em tratar diretamente os produtos do tipo $\tilde{A}'K'$ e $\tilde{A}'E'$, impondo que as matrizes K e E tenham partições comuns (ou relacionadas por escalares), deixando as demais partições livres [DZZM06, Automatica].

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ robusto

- Pegando por exemplo o resultado $\mathscr{H}_\infty$ com Finsler para sistemas contínuos, variáveis extras K, E e Q, fazendo $Q = \mathbf{0}$, tem-se:

Existem matrizes A_f, B_f, C_f e D_f tais que o erro de estimação tende assintoticamente para zero e a norma $\mathscr{H}_\infty$ da função de transferência de w para e é limitada por $\gamma > 0$ se existirem uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ e $K \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} K\tilde{A}+\tilde{A}'K' & P-K+\tilde{A}'E' & K\tilde{B} & \tilde{C}' \\ P-K'+E\tilde{A} & -E-E' & E\tilde{B} & \mathbf{0} \\ \tilde{B}'K' & \tilde{B}'E' & -\mathbf{I}_r & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \mathbf{0} & \tilde{D} & -\gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

Para chegar ao resultado na forma de LMIs, escolhem-se as partições $n \times n$ e as mudanças de variáveis

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & \hat{K} \\ K_{21} & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & \hat{K} \\ E_{21} & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad \hat{K}A_f = K_1, \quad \hat{K}B_f = K_2$$

Filtro $\mathscr{H}_\infty$ robusto

Lema 8

Existe um filtro $\mathscr{H}_\infty$ (A_f, B_f, C_f, D_f) se existirem $0 < P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ particionada como na transparência anterior, $K_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $K_{21} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E_{21} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $\hat{K} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p\times q}$ e $C_f \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} K_{11}A + A'K_{11}' + K_2C_2 + C_2'K_2' & K_1 + A'K_{21}' + C_2'K_2' & P_{11} - K_{11} + A'E_{11}' + C_2'K_2' & P_{12} - \hat{K} + A'E_{21}' + C_2'K_2' & K_{11}B_1 + K_2D_{21} & C_1' \\ \star & K_1 + K_1' & P_{12}' - K_{21} + K_1' & P_{22} - \hat{K} + K_1' & K_{21}B_1 + K_2D_{21} & -C_f' \\ \star & \star & -E_{11} - E_{11}' & -\hat{K} - E_{21}' & E_{11}B_1 + K_2D_{21} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & -\hat{K} - \hat{K}' & E_{21}B_1 + K_2D_{21} & \mathbf{0} \\ \star & \star & \star & \star & -\mathbf{I}_r & D_{11}' - D_{21}'D_f' \\ \star & \star & \star & \star & \star & -\gamma^2\mathbf{I}_p \end{bmatrix} < 0$$

Em caso afirmativo, as matrizes do filtro são C_f, D_f, $A_f = \hat{K}^{-1}K_1$, e $B_f = \hat{K}^{-1}K_2$.

Resultado adaptado de [DZZM06]

- Condição apenas suficiente, sem interesse para o caso precisamente conhecido;
- Extensão para tratar $(A_i, B_{1i}, C_{1i}, C_{2i}, D_{11i}, D_{21i})$, $i = 1, \ldots, N$ (sistemas incertos politópicos) com $P(\alpha) = \sum \alpha_i P_i$, $\alpha \in \Lambda$ é imediata;
- Escolha mais geral para as partições de E e K (como feito em [DZZM06]), porém que requer buscas em λ_1 e λ_2:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & \hat{K} \\ K_{21} & \hat{K} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_{11} & \lambda_1 \hat{K} \\ E_{21} & \lambda_2 \hat{K} \end{bmatrix}$$

- Escolhas particulares de λ_1 e λ_2 garantem a otimalidade no caso precisamente conhecido.
- As matrizes K_{11}, K_{21}, E_{11}, E_{21} e também as partições de P podem ser polinomialmente dependentes de parâmetros (resultados menos conservadores).