IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 4: Incertezas, estabilidade robusta e custo garantido

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2022

Tópicos

Sistemas contínuos

O sistema linear

$$\dot{x} = A(\cdot)x \quad ; \quad A(\cdot) \in \mathscr{A}$$

possui parâmetros incertos (fixos ou variantes no tempo, com taxas de variação conhecidas ou então com taxas de variação arbitrárias).

A estabilidade robusta ocorre se a seguinte condição for verificada $\forall A(\cdot) \in \mathscr{A}$:

- $\lim_{t \to \infty} x(t) \to 0$, para condição inicial $x(0)$ arbitrária
- para sistemas invariantes no tempo, a condição acima é equivalente a

$$\max_i \text{Re}\{\lambda_i(A(\cdot))\} < 0, i = 1, \ldots, n \;\; ; \;\; \forall A(\cdot) \in \mathscr{A}$$

- Além de variantes ou invariantes no tempo, as incertezas podem ser classificadas em função da descrição do conjunto $\mathscr{A}$ como incertezas politópicas, intervalares, estruturadas ou não estruturadas, satisfazendo alguma estrutura especial, etc.

Sistemas discretos

O sistema linear

$$x(k+1) = A(\cdot)x(k) \quad ; \quad A(\cdot) \in \mathscr{A}$$

possui parâmetros incertos (fixos ou variantes no tempo, com taxas de variação conhecidas ou então com taxas de variação arbitrárias).

A estabilidade robusta ocorre se a seguinte condição for verificada $\forall A(\cdot) \in \mathscr{A}$:

- $\lim_{k\to\infty} x(k) \to 0$, para condição inicial $x(0)$ arbitrária

- Sistemas incertos invariantes no tempo

- A estabilidade robusta de $A(\cdot) \in \mathscr{A}$, $A(\cdot) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é equivalente a

$$\max_i |\lambda_i(A(\cdot))| < 1 \;\; ; \;\; i = 1, \ldots, n \;\; \forall A(\cdot) \in \mathscr{A}$$

- Incertezas politópicas

$$\dot{x} = A(\alpha)x \ ; \ A(\alpha) \in \mathscr{A}$$

$$\mathscr{A} = \left\{ A(\alpha) \ : \ A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i \ ; \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \ ; \ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

- vértices A_i, $i = 1, \ldots, N$ são conhecidos

- Incertezas na forma afim (p parâmetros incertos) ou hiperretangular

$$\dot{x} = (A_0 + \theta_1 A_1 + \cdots + \theta_p A_p)x \quad ; \quad \theta_j \in [\underline{\theta}_j, \overline{\theta}_j] \ ; \ j = 1, \ldots, p$$

- Incertezas limitadas em norma

$$\dot{x} = (A + F\Delta G)x \ ; \ \|\Delta\| \leq 1$$

- Incertezas intervalares

$$\dot{x} = Ax \ ; \ A_{min} \leq A \leq A_{max}$$

- Incertezas na forma linear fracionária

  - Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bw$$
$$z = Cx + Dw$$

e suponha que a entrada exógena w é proporcional à saída z, ou seja, $w = \Delta z$. Então,

$$\dot{x} = (A + B\Delta(\mathbf{I} - D\Delta)^{-1}C)x$$

  - A representa o sistema nominal
  - $\Delta \in \mathscr{A}_\Delta$ representa a incerteza
  - pode ou não ter alguma estrutura particular (por exemplo, diagonal)

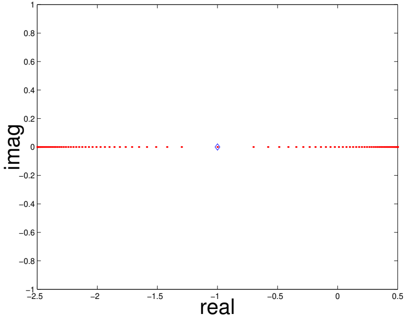
- Outra maneira de representar incertezas: “blocos” em diagramas envolvendo matrizes de transferência

Incertezas politópicas: caso contínuo

- A estabilidade dos vértices não garante a estabilidade do politopo

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \;;\; \lambda(A_1) = \lambda(A_2) = -1; -1$$

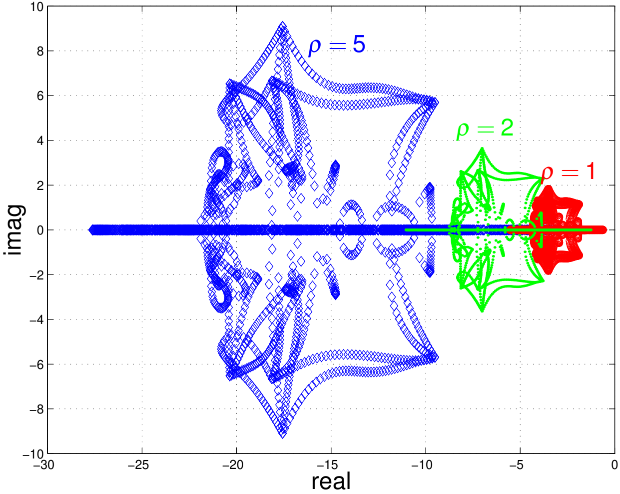
No entanto: $\lambda\left(\dfrac{A_1 + A_2}{2}\right) = -2.5; 0.5$



- a estabilidade dos vértices é apenas condição necessária para a estabilidade robusta

Incertezas politópicas: caso contínuo

- Uma propriedade interessante de politopos estáveis: se $A(\alpha) \in \mathscr{A}$ é estável, então $\rho A(\alpha)$ também é estável $\forall \; \rho > 0$



Incerteza politópica: caso discreto

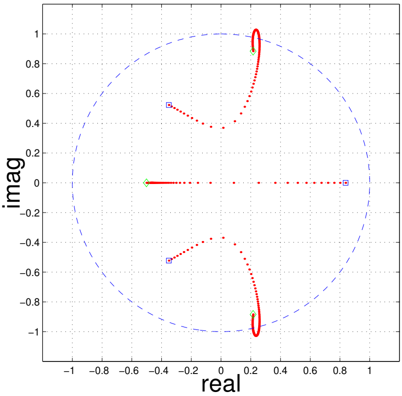
- A estabilidade dos vértices não garante a estabilidade robusta (é apenas condição necessária)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2098 & -0.4505 & 1.3844 \\ 1.1095 & 0.6493 & -1.5279 \\ -0.5196 & 0.0355 & -0.9285 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A_1) = 0.2159 \pm 0.8842i, -0.5013$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1.2340 & -0.7170 & 1.5800 \\ 3.5167 & 0.0485 & 0.0296 \\ 0.6974 & -0.5101 & 1.3217 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A_2) = -0.3510 \pm 0.5227i, 0.8383$$



- Se as matrizes $A(\alpha)$ pertencentes ao politopo $\mathscr{A}$ são estáveis, então as matrizes descritas por $\rho A(\alpha)$ são também estáveis para todo $0 \leq \rho \leq 1$

Custo garantido $\mathscr{H}_\infty$

Considere o sistema linear incerto invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)w(t)$$
$$y(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)w(t)$$

com $w(t) \in \mathbb{R}^m$ representando uma entrada exógena e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida. As matrizes que descrevem o sistema não são precisamente conhecidas, mas pertencem a um politopo $\mathscr{D}$ dado por

$$\mathscr{D} = \Big\{(A,B,C,D)(\alpha) \ : \ (A,B,C,D)(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (A,B,C,D)_i \ ; \ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1 \ ; \ \alpha_i \geq 0\Big\}$$

cujos vértices são denotados $(A,B,C,D)_i$ ou (A_i,B_i,C_i,D_i), $i = 1,\ldots,N$. A matriz de transferência é dada por

$$H(\alpha,s) = C(\alpha)(s\mathbf{I} - A(\alpha))^{-1}B(\alpha) + D(\alpha)$$

- Um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ é qualquer valor $\gamma > 0$ tal que $\|H(\alpha,s)\|_\infty < \gamma$, $\forall\ (A,B,C,D)(\alpha) \in \mathscr{D}$. O menor valor de γ corresponde à norma $\mathscr{H}_\infty$ de pior caso no politopo. Uma busca exaustiva no parâmetro α (grade fina) pode fornecer um valor aproximado para a norma de pior caso.

Custo garantido $\mathscr{H}_2$

Considere o sistema linear incerto invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)w(t) \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) \end{aligned}$$

- Um custo garantido $\mathscr{H}_2$ é qualquer valor $\rho > 0$ tal que $\|H(\alpha, s)\|_2 < \rho$, $\forall\ (A, B, C)(\alpha) \in \mathscr{D}$

- O custo garantido ótimo teria que ser computado procurando-se pelo mínimo valor de ρ, “varrendo-se” todo o espaço paramétrico em α

LMIs dependentes de parâmetros: caso contínuo

- Uma condição suficiente para a estabilidade robusta de $\dot{x} = A(\alpha)x$, $\forall A(\alpha) \in \mathscr{A}$ (sistema variante ou invariante no tempo, conjunto $\mathscr{A}$ politópico) é dada pela existência de $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \dot{P}(\alpha) < 0$$

- Condição para que a função quadrática $v(x(t)) = x(t)'P(\alpha)x(t) > 0$ possua derivada negativa para todo $x(t)$. De fato, $\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t)$ e

$$\dot{v} = \dot{x}'P(\alpha)x + x'\Big(P(\alpha)\dot{x} + \dot{P}(\alpha)x\Big) = x'\ \Big(A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \dot{P}(\alpha)\Big)x$$

- Depende da existência de $\dot{P}(\alpha)$!

LMIs dependentes de parâmetros: caso contínuo

- No caso invariante no tempo, a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica de $A(\alpha) \in \mathscr{A}$ é dada pela existência de $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \ , \ \forall \alpha \in \Lambda$$

com

$$\Lambda = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0 \right\}$$

- $P(\alpha)$ é uma matriz de Lyapunov dependente do parâmetro α.

- A condição é de dimensão infinita pois a estrutura de $P(\alpha)$ é desconhecida.

- Fixando-se estruturas para $P(\alpha)$, é possível obter condições (finitas) suficientes para a estabilidade robusta na forma de LMIs. Caso essas condições forneçam uma solução, então tem-se um certificado de estabilidade robusta para o sistema.

LMIs dependentes de parâmetros: caso discreto

- Uma condição suficiente para a estabilidade robusta de $x(k+1) = A(\alpha)x(k)$, $\forall A(\alpha) \in \mathscr{A}$ (sistema variante ou invariante no tempo, conjunto $\mathscr{A}$ politópico) é dada pela existência de $P(\alpha(k)) = P(\alpha(k))' > 0$ tal que

$$A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) < 0$$

De fato, escolhendo a função de Lyapunov $v(x(k)) = x(k)'P(\alpha(k))x(k)$ tem-se

$$\Delta v(x(k)) = v(x(k+1)) - v(x(k)) = x(k+1)'P(\alpha(k+1))x(k+1) - x(k)'P(\alpha(k))x(k) =$$

$$= x(k)'\Big(A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k))\Big)x(k) - x(k)'P(\alpha(k))x(k)$$

e, consequentemente, $v(x(k)) > 0$ e $\Delta v(x(k)) < 0$ se e somente se $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ e

$$x(k)'\Big(A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k))\Big)x(k) < 0 \ \ ; \ \ \forall x(k) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1))A(\alpha(k)) - P(\alpha(k)) < 0$$

LMIs dependentes de parâmetros: caso discreto

- No caso invariante no tempo, a condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica de $A(\alpha) \in \mathscr{A}$ é dada pelas existência de $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0 \quad , \quad \forall \alpha \in \Lambda$$

- $P(\alpha)$ é uma matriz de Lyapunov dependente do parâmetro α.

- A condição é de dimensão infinita pois a estrutura de $P(\alpha)$ é desconhecida.

- Fixando-se estruturas para $P(\alpha)$, é possível obter condições (finitas) suficientes para a estabilidade robusta na forma de LMIs. Caso essas condições forneçam uma solução, então tem-se um certificado de estabilidade robusta para o sistema.

Custo garantido $\mathscr{H}_\infty$

- Utilizando a caracterização no espaço de estados, tem-se que γ é um custo garantido $\mathscr{H}_\infty$ se existir $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + C(\alpha)'C(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) + C(\alpha)'D(\alpha) \\ B(\alpha)'P(\alpha) + D(\alpha)'C(\alpha) & D(\alpha)'D(\alpha) - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\forall\ (A,B,C,D)(\alpha) \in \mathscr{D}$$

para sistemas a tempo contínuo ou

$$\begin{bmatrix} P(\alpha) & A(\alpha)'P(\alpha) & \mathbf{0} & C(\alpha)' \\ P(\alpha)A(\alpha) & P(\alpha) & P(\alpha)B(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(\alpha)'P(\alpha) & \mathbf{I} & D(\alpha)' \\ C(\alpha) & \mathbf{0} & D(\alpha) & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad ; \quad \forall\ (A,B,C,D)(\alpha) \in \mathscr{D}$$

para sistemas a tempo discreto.

- O custo garantido ótimo (ou norma $\mathscr{H}_\infty$ de pior caso) é computado procurando-se pelo mínimo valor de γ que atende as restrições $\forall (A,B,C,D)(\alpha) \in \mathscr{D}$.

- Qual deve ser a estrutura para $P(\alpha)$ para que o custo garantido seja computado sem conservadorismo?

Custo garantido $\mathscr{H}_2$: caso contínuo

- Utilizando a caracterização no espaço de estados, tem-se que ρ é um custo garantido $\mathscr{H}_2$ se existir $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que, $\forall\ (A,B,C)(\alpha) \in \mathscr{D}$

$$\rho^2 \geq \mathbf{Tr}\big(B(\alpha)'P(\alpha)B(\alpha)\big)$$

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + C(\alpha)'C(\alpha) \leq 0$$

ou ainda

$$\rho^2 \geq \mathbf{Tr}\big(C(\alpha)W(\alpha)C(\alpha)'\big)$$

$$A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)' + B(\alpha)B(\alpha)' \leq 0$$

Custo garantido $\mathscr{H}_2$: caso discreto

- Utilizando a caracterização no espaço de estados, tem-se que ρ é um custo garantido $\mathscr{H}_2$ se existir $P(\alpha) = P(\alpha)' > 0$ tal que, $\forall\ (A,B,C)(\alpha) \in \mathscr{D}$

$$\rho^2 \geq \mathbf{Tr}\big(B(\alpha)'P(\alpha)B(\alpha)\big)$$

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) + C(\alpha)'C(\alpha) \leq 0$$

ou ainda

$$\rho^2 \geq \mathbf{Tr}\big(C(\alpha)W(\alpha)C(\alpha)'\big)$$

$$A(\alpha)W(\alpha)A(\alpha)' - W(\alpha) + B(\alpha)B(\alpha)' \leq 0$$

- Qual deve ser a estrutura para $P(\alpha)$ para que o custo garantido seja computado sem conservadorismo?

$\mathscr{H}_\infty$ e incertezas “norm-bounded”

Os lemas a seguir apresentam majorações de produtos cruzados bastante usadas na análise de sistemas com incerteza limitada em norma e também em funcionais associados a condições de estabilidade de sistemas com atraso.

Lema (Produtos Cruzados — Matrizes): Para $\varepsilon > 0$ e matrizes X, Y de dimensões compatíveis, tem-se

$$X'Y + Y'X \leq \frac{1}{\varepsilon}X'X + \varepsilon Y'Y$$

pois, $\forall \varepsilon > 0$, X e Y,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}X - \sqrt{\varepsilon}Y\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}X - \sqrt{\varepsilon}Y\right) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon}X'X + \varepsilon Y'Y - X'Y - Y'X \geq 0$$

Lema (Produtos Cruzados — Vetores): Para $v \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^n$ e $M = M' > 0$ e $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$2v'w \leq v'M^{-1}v + w'Mw$$

pois

$$0 \leq (v - Mw)'M^{-1}(v - Mw) = v'M^{-1}v + w'Mw - v'w - w'v$$

$\mathscr{H}_\infty$ e incertezas “norm-bounded”

Considere o sistema linear incerto variante no tempo

$$\dot{x} = (A + BF(t)C)x \quad , \quad F(t)F(t)' \leq \gamma^{-2}\mathbf{I}$$

Utilizando a função de Lyapunov $v(x) = x'Px$, com $P = P' > 0$ a determinar, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} && (1)\\ &= x'\big((A+BF(t)C)'P + P(A+BF(t)C)\big)x && (2)\\ &= x'\big(A'P + PA + C'F(t)'B'P + PBF(t)C\big)x && (3) \end{aligned}$$

Escolhendo $X = C$, $Y = F(t)'B'P$ e aplicando o Lema,

$$\dot{v}(x) \leq x'\big(A'P + PA + \frac{1}{\varepsilon}C'C + \varepsilon PBF(t)F(t)'B'P\big)x$$

e levando em conta que $F(t)F(t)' \leq \gamma^{-2}\mathbf{I}$,

$$\dot{v}(x) \leq x'\big(A'P + PA + \frac{1}{\varepsilon}C'C + \varepsilon\gamma^{-2}PBB'P\big)x$$

$\mathscr{H}_\infty$ e incertezas "norm-bounded"

Portanto, o sistema é estável para essa classe de incertezas se existir $P > 0$ tal que

$$A'P + PA + \frac{1}{\varepsilon}C'C + \varepsilon\gamma^{-2}PBB'P < 0$$

para algum $\varepsilon > 0$ ou, equivalentemente, se existir $P > 0$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(A'(\varepsilon P) + (\varepsilon P)A + C'C + \gamma^{-2}(\varepsilon P)BB'(\varepsilon P)\right) < 0$$

que é equivalente à existência de $P > 0$ tal que

$$A'P + PA + C'C + \gamma^{-2}PBB'P < 0$$

ou, usando complemento de Schur,

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB \\ B'P & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

que é a condição que garante norma $\mathscr{H}_\infty$ menor do que γ para o sistema linear descrito por

$$\dot{x} = Ax + Bw \quad , \quad y = Cx$$

conhecida na literatura como o *bounded real lemma*.

$\mathscr{H}_\infty$ e incertezas "norm-bounded"

De fato, com a mesma função quadrática de Lyapunov $v(x) = x'Px$, a condição de norma $\mathscr{H}_\infty$ menor do que γ pode ser escrita como

$$\dot{v} + y'y - \gamma^2 w'w < 0 \quad \Longrightarrow \quad \|y\|_2 < \gamma \|w\|_2$$

que resulta em

$$x'\left(A'P + PA + C'C\right)x + x'PBw + w'B'Px - \gamma^2 w'w < 0$$

A expressão pode ser re-arranjada da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB \\ B'P & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0$$