Lista 1

1.1 Mostre que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\lambda_i(\alpha A) = \alpha\lambda_i(A)$

1.2 Mostre que o conjunto de matrizes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que $\text{Re}\,\{\lambda_i(A)\} \leq 0, \forall i$ não é um conjunto convexo.

1.3 Mostre que

$$\Big|\lambda_i(A/\rho)\Big| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Big|\lambda_i(A)\Big| < \rho, \quad \rho > 0$$

1.4 Mostre que se $|\lambda_i(A)| < 1$, então $|\lambda_i(\rho A)| < 1 \ \forall\rho \ : \ |\rho| \leq 1$

1.5 Mostre que a desigualdade $x^2 + y^2 - 1 < 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, define um conjunto convexo.

1.6 Considere $P = P' > 0$ e $R = R' > 0$. Obtenha na forma de LMI uma expressão equivalente à

a) $A'P + PA + PRP < 0$

b) $A'PA - P + PRP < 0$

c) $A'P + PA + (PB - C)'R^{-1}(PB - C) < 0$

1.7 Transforme a desigualdade

$$(X^{-1} + Y^{-1})^{-1} > Z^{-1} + W'W$$

em uma LMI nas variáveis de decisão X, Y, Z e W.

1.8 Transforme o problema de determinação de uma matriz diagonal $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular tal que, para $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dada, $\|DMD^{-1}\| < 1$ em um problema de factibilidade de LMIs

1.9 Considere $F(X)$ uma função matricial afim na variável X. Transforme o problema de determinação de $\lambda_{max}(F(X)'F(X))$ em um problema de minimização linear sujeito a restrições LMIs. [Dica: $\lambda_{max}(F(X)'F(X)) < \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma\mathbf{I} - F(X)'F(X) > 0$]

1.10 Para $Q = \mathbf{I}$ de dimensão apropriada e para cada uma das matrizes abaixo, resolva a equação de Lyapunov contínua $A'P + PA = -Q$ no Matlab usando:

a) a função `lyap`;

b) produto de Kronecker e algum método para resolução de um sistema linear de equações;

c) o problema convexo de otimização

$$\min \ \mathbf{Tr}(P)$$

sujeito a

$$A'P + PA + \mathbf{I} < 0$$

Compute os tempos de resolução em função da ordem das matrizes (divida pelo tempo do item a) para normalizar) e o erro em relação à solução da equação de Lyapunov (norma de $P_{Lyap} - P$) para cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} -0.3937 & 0.4057 \\ 0.1763 & -0.1964 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; A = \begin{bmatrix} -0.9400 & 0.0185 & 0.6154 \\ 0.7621 & -1.0099 & 0.7919 \\ 0.4565 & 0.4447 & -0.9095 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -0.6723 & 0.3529 & 0.2028 & 0.1988 \\ 0.4103 & -0.7760 & 0.1987 & 0.0153 \\ 0.8936 & 0.0099 & -0.9854 & 0.7468 \\ 0.0579 & 0.1389 & 0.2722 & -1.1441 \end{bmatrix}$$

1.11 Para $Q = \mathbf{I}$ de dimensão apropriada e para cada uma das matrizes abaixo, resolva a equação de Lyapunov contínua $A'PA - P = -Q$ no Matlab usando:

a) a função `dlyap`;

b) produto de Kronecker e algum método para resolução de um sistema linear de equações;

c) o problema convexo de otimização

$$\min \; \mathbf{Tr}(P)$$

sujeito a

$$A'PA - P + \mathbf{I} < 0$$

d) o problema convexo de otimização

$$\min \; \mathbf{Tr}(P)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} P - \mathbf{I} & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} > 0$$

Compute os tempos de resolução em função da ordem das matrizes (divida pelo tempo do item a) para normalizar) e o erro em relação à solução da equação de Lyapunov (norma de $P_{Lyap} - P$) para cada caso.

$$A = \begin{bmatrix} -1.4846 & 0.4302 \\ -5.7165 & 0.9873 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; A = \begin{bmatrix} -1.1989 & -0.0394 & -0.1952 \\ 1.2454 & 0.3423 & 0.7590 \\ 1.2435 & 0.1826 & -0.6152 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7678 & 0.0208 & -0.4699 & 0.3017 \\ -0.0480 & -0.0336 & 0.2512 & 0.4410 \\ 0.0401 & -0.2927 & 0.5710 & -0.5605 \\ 0.3751 & 0.1035 & -0.2433 & -0.5067 \end{bmatrix}$$

1.12 Seja a desigualdade

$$A'XA - \rho^2 X + C'C < 0$$

com $X = X' > 0$ a variável de otimização do problema, A e C matrizes dadas e ρ um escalar dado.

(a) Determine T e Q tais que

$$T'QT = A'XA - \rho^2 X + C'C$$

(b) Considerando $T'QT < 0$, determine uma desigualdade equivalente com variáveis adicionais utilizando o Lema de Finsler.

1.13 Considere a desigualdade

$$\begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} + \mathrm{He}\left(\begin{bmatrix} \xi I \\ -I \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}\right) < 0$$

com $\mathrm{He}\{W\} = W + W'$, X e $P = P'$ variáveis de otimização do problema, e $\xi \in (-1, 1)$ um escalar dado. Mostre que a desigualdade tem solução se, e somente se a matriz A for Schur estável. Note que não é imposto nenhum sinal sobre as matrizes X e P.

1.14 Sejam os sistemas lineares a tempo contínuo

$$\dot{x} = Ax, \qquad \dot{z} = Bz,$$

Usando o lema da Projeção (slide 33 da aula 1), forneça uma condição baseada em LMIs que certifique a estabilidade dos dois sistemas usando a mesma matriz de Lyapunov P.

1.15 Seja o sistema linear a tempo contínuo

$$\dot{x} = ABx$$

sendo A e B duas matrizes quadradas quaisquer. Construa uma condição LMI para testar a estabilidade do sistema obedecendo a seguinte restrição: a condição LMI não pode conter o produto entre A e B.