Lista 2

2.1 Determine a norma $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas

a) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -x + w \\ y = 2x \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{array} \right.$

2.2 Mostre que a existência de $P = P' > 0$ que satisfaz qualquer uma das condições abaixo garante $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ para o sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Dw(t) \end{array} \tag{1}$$

a) $A'P + PA + C'C + (PB + C'D)(\gamma^2\mathbf{I} - D'D)^{-1}(B'P + D'C) < 0$

b) $\begin{bmatrix} A'P + PA + C'C & PB + C'D \\ B'P + D'C & D'D - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

c) $\begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2}C'C & PB + \gamma^{-2}C'D \\ B'P + \gamma^{-2}D'C & \gamma^{-2}D'D - \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

d) $\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma^2\mathbf{I} & D' \\ C & D & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

e) $\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\mathbf{I} & D' \\ C & D & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

f) $\begin{bmatrix} A'P + PA & PB & C' \\ B'P & -\gamma\mathbf{I} & D' \\ C & D & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

2.3 Determine a norma $\mathcal{H}_\infty$ dos sistemas

a) $\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = 0.5x(k) + 2w(k) \\ y(k) = 5x(k) \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{array} \right.$

2.4 Mostre que a existência de $P = P' > 0$ que satisfaz qualquer uma das condições abaixo garante $\|H(z)\|_\infty < \gamma$ para o sistema discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k) \end{aligned}$$

a) $A'PA - P + C'C + (A'PB + C'D)(\gamma^2\mathbf{I} - B'PB - D'D)^{-1}(B'PA + D'C) < 0$

b) $\begin{bmatrix} A'PA - P + C'C & A'PB + C'D \\ B'PA + D'C & B'PB + D'D - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

c) $\begin{bmatrix} A'PA - P + \gamma^{-2}C'C & A'PB + \gamma^{-2}C'D \\ B'PA + \gamma^{-2}D'C & B'PB + \gamma^{-2}D'D - \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$

d) $\begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$

e) $\begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma^2\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$

f) $\begin{bmatrix} P & A'P & \mathbf{0} & C' \\ PA & P & PB & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B'P & \gamma\mathbf{I} & D' \\ C & \mathbf{0} & D & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} > 0$

2.5 No item f) do exercício anterior, aplique transformações de congruência para inverter: as linhas e colunas 1 e 3, e as linhas e colunas 2 e 4.

2.6 Faça um programa para o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ por meio de LMIs, usando as condições baseadas no *bounded real lemma* e as condições aumentadas (Finsler). Gere 10 sistemas estáveis de várias dimensões e compare os valores obtidos pelos programas com o resultado da rotina `norm` do Matlab. Repita para o caso discreto.

2.7 Seja o sistema definido em (1) com as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Considerando $w(t) = \sin(\omega t)\exp(-0.1t)$, $t \in [0, 10]$, faça um programa que computa a relação entre a energia do sinal de saída $y(t)$ e a energia do sinal de entrada $w(t)$. O cômputo da energia de um sinal pode ser feito utilizando a rotina *trapz*, por exemplo

```
w=3;
T=0.01;
t=0:T:10;
sinal=sin(w*t).*exp(-0.1*t);
energia=sqrt(trapz(sinal.^2)*T);
```

Compute a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema usando LMIs e depois teste o programa elaborado para vários valores de ω em torno do valor 4.