Lista 2015

2015.1 Seja o sistema incerto contínuo no tempo

$$\dot{x} = A(\alpha)x,$$

sendo $A(\alpha)$ uma matriz politópica, isto é,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

cujos vértices A_i, $i = 1, \ldots, N$ são conhecidos e Λ_N é o simplex unitário dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \right\}$$

Elabore uma rotina em matlab que trace o lugar das raízes da matriz $A(\alpha)$ testando diversos valores de α (malha fina). A rotina deve receber como entrada as matrizes A_i em formato célula ($A\{i\}$). Escolha de uma maneira sistemática um número adequado de pontos α para que a "nuvem" represente o melhor possível todos os autovalores de $A(\alpha)$. Plote também os eixos real e imaginário. Como saída, a rotina deve fornecer o máximo valor da parte real dos autovalores, bem como o ponto α^* associado. Entregue o código fonte e um exemplo gerado aleatoriamente de modo que o autovalor de maior parte real não aconteça nos vértices.

2015.2 Faça um programa para gerar matrizes politópicas $A(\alpha)$ estáveis. Dados n (número de estados), N (número de vértices) e uma distância máxima do eixo real $d > 0$, o programa deve retornar uma matriz A contendo os vértices A_i em formato celular. O máximo valor da parte real dos autovalores de $A(\alpha)$ deve ser aproximadamente igual a $-d$. Entregue o código fonte e um exemplo gerado aleatoriamente de modo que o autovalor de maior parte real seja igual a -1 (o lugar das raízes desse exemplo deverá ser fornecido).

2015.3 Usando as condições suficientes do Teorema 2 (aula 7), determine o maior valor de γ tal que o sistema linear variante no tempo

$$\dot{x}(t) = \alpha_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} + \alpha_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -21 & -2 \end{bmatrix}, \quad \alpha(t) \in \Delta_N,\ \forall t \geq 0$$

seja robustamente estável para as seguintes taxas de variação:

$$-\gamma \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq \gamma, \quad -\gamma \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq \gamma$$

Entregue o código fonte.

2015.4 Adapte as condições do Lema 1 apresentado na Aula 5 (Finsler com variáveis de folga constantes) para tratar o caso variante no tempo. Programe as LMIs resultantes e aplique no sistema linear variante no tempo do exercício anterior para descobrir o maior valor de γ admissível por essa condição. Apresente o código fonte da nova condição.

2015.5 Seja $P(\alpha)$ uma matriz afim em α, e o teste de estabilidade robusta associado a sistemas discretos politópicos

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) < 0, \quad P(\alpha) > 0$$

- Considerando $N = 2$, a condição de estabilidade é escrita na forma

$$A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha) - P(\alpha) = \alpha_1^3(T_1) + \alpha_1^2\alpha_2(T_2) + \alpha_1\alpha_2^2(T_3) + \alpha_2^2(T_4) < 0$$

  Determine as expressões de T_i e programe as condições que garantem a estabilidade robusta, isto é, $T_i < 0$, $i = 1, \ldots, 4$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$. Dica: Para que os termos de $P(\alpha)$ (polinômio de grau 1) possam ser agrupados com os termos de $A(\alpha)'P(\alpha)A(\alpha)$ (polinômio de grau 3), considere $P(\alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 P(\alpha)$, uma vez que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Considerando $A(\alpha) = \mu(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2)$ determine o maior valor de μ tal que a condição programada detecte estabilidade. As matrizes A_1 e A_2 são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

- Repita o procedimento para $N = 3$ (forneça as expressões de T_i e programe a condição). Considerando $A(\alpha) = \mu(A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3)$ determine o maior valor de μ tal que a condição programada detecte estabilidade. As matrizes A_1, A_2 e A_3 são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2015.6 Certifique a estabilidade robusta do seguinte sistema linear discreto variante no tempo

$$x(k+1) = \alpha_1(k)\begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} + \alpha_2(k)\begin{bmatrix} 0.5131 & 0 \\ 1 & 0.5131 \end{bmatrix}, \quad \alpha(k) \in \Delta_N, \ \forall k \geq 0,$$

sendo que $\alpha_1(k)$ e $\alpha_2(k)$ podem variar arbitrariamente. Apresente a matriz de Lyapunov (com quatro casas decimais de precisão). Entregue o código fonte.

2015.7 Seja o sistema linear cujas matrizes (A, B) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 15 \\ 0 & -5 & 8 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Considerando o sistema contínuo no tempo, obtenha um ganho "cheio" e, se possível, um ganho descentralizado com a estrutura

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} \\ 0 & k_{22} & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

que estabilizem o sistema, usando o Lema 1 da Aula 8.

b) Repita, usando o Lema 5 com $\xi \in \{0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, 100\}$.

c) Considerando o sistema como discreto no tempo, determine um ganho "cheio" e um ganho descentralizado (estrutura acima, se for possível), usando o Lema 9.

d) Repita usando a variável de folga G para sintetizar o ganho K (Lema 10).

Entregue o código fonte.

2015.8 Seja o sistema linear precisamente conhecido a tempo contínuo

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} w \\
z &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} x + 2w \\
y &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix} x + 0w
\end{aligned}$$

Forneça o filtro $\mathcal{H}_\infty$ ótimo (4 casas de precisão) e o código utilizado para sintetizar o filtro.

2015.9 Usando as condições LMI do Lema 2 da aula 10, determine um ganho estabilizante $u(t) = Ly(t)$ para o sistema linear

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned} \tag{2}$$

com as matrizes (A, B, C) dadas por: a) (3) b) (4) c) (5)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Apresente o ganho estabilizante (caso exista) e o código fonte do programa.

2015.10 Seja um sistema linear contínuo no tempo com as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine os controladores ótimos $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de ordem completa. Deverão ser apresentadas as matrizes dos controladores (truncadas com 2 casas decimais), os valores das normas e os códigos fontes dos programas.