Lista 2017 – Parte I

2017.1 Seja o sistema incerto contínuo no tempo

$$\dot{x} = A(\alpha)x,$$

sendo $A(\alpha)$ uma matriz politópica, isto é,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

cujos vértices A_i, $i = 1, \ldots, N$ são conhecidos e Λ_N é o simplex unitário dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^{N} \xi_i = 1,\ \xi_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, N \right\}$$

Elabore uma rotina em matlab que trace o lugar das raízes da matriz $A(\alpha)$ testando diversos valores de α (malha fina). A rotina deve receber como entrada as matrizes A_i em formato célula ($A\{i\}$). A malha fina deverá contemplar, no mínimo, os seguintes conjuntos de pontos

- 1000 pontos uniformemente distribuídos dentro do politopo. Para gerar esses pontos, use o código apresentado no apêndice.
- 100 pontos (igualmente espaçados) para cada segmento de reta entre quaisquer par de vértices (i, j) do politopo.
- 150 pontos uniformemente distribuídos dentro do subpolitopo formado por cada tripla (i, j, k) de vértices do politopo. Observação: não se aplica a sistemas com dois e três vértices.

Plote também os eixos real e imaginário. Como saída, a rotina deve fornecer o máximo valor da parte real dos autovalores, bem como o ponto α^* associado. Entregue o código fonte e um exemplo gerado aleatoriamente de modo que o autovalor de maior parte real não aconteça nos vértices.

2017.2 Faça um programa para gerar matrizes politópicas $A(\alpha)$ Hurwitz estáveis. Dados n (número de estados), N (número de vértices) e uma distância máxima do eixo real $d > 0$, o programa deve retornar uma matriz A contendo os vértices A_i em formato celular. O máximo valor da parte real dos autovalores de $A(\alpha)$ deve ser aproximadamente igual a $-d$. Entregue o código fonte e um exemplo gerado aleatoriamente de modo que o autovalor de maior parte real seja igual a -1 (o lugar das raízes desse exemplo deverá ser fornecido).

2017.3 Seja o gramiano de controlabilidade de um sistema a tempo contínuo em termos de uma LMI

$$AP + PA' + BB' < 0$$

(a) Usando o Lema de Finsler, obtenha uma condição equivalente com variáveis de folga.

(b) Usando novamente o Lema de Finsler, obtenha uma LMI equivalente à condição obtida em (a) com mais variáveis de folga.

2017.4 Determine as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + w \\ y = 2x \end{cases}$$

usando a definição. Compare os valores determinados com os obtidos por meio do comando `norm` do matlab.

2017.5 Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \tag{1}$$

com as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Considerando $w(t) = \sin(\omega t)\exp(-0.1t)$, $t \in [0, 10]$, faça um programa que computa a relação entre a energia do sinal de saída $y(t)$ e a energia do sinal de entrada $w(t)$. O cômputo da energia de um sinal pode ser feito utilizando a rotina *trapz*, por exemplo

```
w=3;
T=0.01;
t=0:T:10;
sinal=sin(w*t).*exp(-0.1*t);
energia=sqrt(trapz(sinal.^2)*T);
```

Compute a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema usando LMIs (apresente o código) e depois teste o programa elaborado para os seguintes valores de $\omega \in \{3.8, 3.85, 3.9, 3.95, 4.0, 4.05, 4.10, 4.15, 4.20\}$.

Referências

[1] A. Moeini, B. Abbasi, and H. Mahlooji. Conditional distribution inverse method in generating uniform random vectors over a simplex. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 40(5):685–693, 2011.

Apêndice

Código que pode ser utilizado para encontrar pontos randômicos uniformemente distribuídos dentro do simplex unitário. Fonte: [1]

```
N=3 % número de vértices
x(1)=1-rand^(1/(N-1))
for k=2:N-1
    x(k)=(1-sum(x(1:k-1)))*(1-rand^(1/(N-k)));
end
x(N)=1-sum(x(1:N-1))
```