

Lista 2018 – Parte I

2017.1 Seja o sistema linear incerto

$$\delta(x) = A(\alpha)x,$$

sendo $A(\alpha)$ uma matriz politópica, isto é,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \quad \alpha \in \Lambda_N$$

cujos vértices A_i , $i = 1, \dots, N$ são conhecidos e Λ_N é o simplex unitário dado por

$$\Lambda_N \triangleq \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \xi_i = 1, \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}$$

O operador $\delta(\cdot)$ representa a derivada ($\delta x(t) = d(x(t))/dt$) no caso de sistemas a tempo contínuo e o operador deslocamento unitário ($px(k) = x(k+1)$) no caso de sistemas a tempo discreto. Elabore uma rotina em matlab que desenhe o lugar das raízes da matriz $A(\alpha)$ testando diversos valores de α (malha fina). A rotina deve receber como entrada as matrizes A_i em formato célula ($A\{i\}$) e um *flag* indicando se é um sistema contínuo ou discreto. A malha fina deverá contemplar, no mínimo, os seguintes conjuntos de pontos

- 1000 pontos uniformemente distribuídos dentro do politopo. Para gerar esses pontos, use o código apresentado no apêndice.
- 100 pontos (igualmente espaçados) para cada segmento de reta entre quaisquer par de vértices (i, j) do politopo.
- 150 pontos uniformemente distribuídos dentro do subpolitopo formado por cada tripla (i, j, k) de vértices do politopo. Observação: não se aplica a sistemas com dois e três vértices.

Plote também os eixos real e imaginário e no caso de sistemas discretos, o círculo unitário. Como saída, a rotina deve fornecer o máximo valor da parte real (do módulo) dos autovalores, bem como o ponto α^* associado. Entregue o código fonte e dois exemplos gerados aleatoriamente de modo que o autovalor de maior parte real (maior módulo) não aconteça nos vértices ($\alpha_i = 1$, $\alpha_j = 0$, $i \neq j$).

2017.2 Faça um programa para gerar sistemas lineares discretos com matrizes aleatórias incertas $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ e $D(\alpha)$ politópicas com $A(\alpha)$ Schur estável e que o maior módulo dos autovalores seja aproximadamente igual a d . Dados n (número de estados), m (número de entradas), p (número de saídas), N (número de vértices) e $d < 1$, o programa deve retornar as matrizes A, B, C, D contendo os vértices em formato celular, além de também fornecer o valor das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema. Entregue o código fonte e um exemplo gerado aleatoriamente de modo que o autovalor de maior maior módulo seja aproximadamente 0.95 (o lugar das raízes desse exemplo deverá ser fornecido).

2017.3 Seja a LMI dependente de parâmetros

$$A(\alpha(t))'P(\alpha(t)) + P(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \dot{P}(\alpha(t)) < 0$$

- (a) Usando o Lema de Finsler, obtenha uma condição equivalente com variáveis de folga.
- (b) Usando novamente o Lema de Finsler, obtenha uma LMI equivalente à condição obtida em (a) com mais variáveis de folga.

2017.4 Determine as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2w \\ y = x \end{cases}$$

usando a definição. Compare os valores determinados com os obtidos por meio do comando `norm` do matlab.

2017.5 Seja o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad (1)$$

com as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 2], \quad D = 0$$

- (a) Considerando $w(t) = \sin(\omega t) \exp(-0.1t)$, $t \in [0, 10]$, faça um programa que computa a relação entre a energia do sinal de saída $y(t)$ e a energia do sinal de entrada $w(t)$. O cômputo da energia de um sinal pode ser feito utilizando a rotina `trapz`, por exemplo

```
w=3;
T=0.01;
t=0:T:10;
sinal=sin(w*t).*exp(-0.1*t);
energia=sqrt(trapz(sinal.^2)*T);
```

- (b) Compute a norma \mathcal{H}_∞ do sistema usando LMIs (apresente o código) e depois teste o programa elaborado para os seguintes valores de $\omega \in \{3.8, 3.85, 3.9, 3.95, 4.0, 4.05, 4.10, 4.15, 4.20\}$.
- (c) Substitua o sinal de entrada pelo impulso unitário e compute a norma \mathcal{H}_2 por meio da determinação da energia da saída.
- (d) Compute a norma \mathcal{H}_2 do sistema usando LMIs (apresente o código) e compare o resultado com o obtido no item (c).

Referências

- [1] A. Moeini, B. Abbasi, and H. Mahlooji. Conditional distribution inverse method in generating uniform random vectors over a simplex. *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 40(5):685–693, 2011.

Apêndice

Código que pode ser utilizado para encontrar pontos randômicos uniformemente distribuídos dentro do simplex unitário. Fonte: [1]

```
N=3 % número de vértices
x(1)=1-rand^(1/(N-1))
for k=2:N-1
    x(k)=(1-sum(x(1:k-1)))*(1-rand^(1/(N-k)));
end
x(N)=1-sum(x(1:N-1))
```