Lista 3

3.1 Determine a norma $\mathcal{H}_2$ dos sistemas

a) $\begin{cases} \dot{x} = -x + w \\ y = 2x \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$

3.2 Mostre que a existência de $P = P' > 0$ que satisfaz qualquer uma das condições abaixo garante $\|H(s)\|_2^2 < \rho$ para o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

a) $A'P + PA + C'C \leq 0 \quad ; \quad \rho \geq \mathbf{Tr}(B'PB)$

b) $\begin{bmatrix} A'P + PA & C' \\ C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad ; \quad \rho \geq \mathbf{Tr}(B'PB)$

c) $A'P + PA + C'C \leq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{I} & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(\sigma\mathbf{I})$

d) $\begin{bmatrix} A'P + PA & C' \\ C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} X & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(X)$

e) $\begin{bmatrix} AP + PA' & B \\ B' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{I} & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(\sigma\mathbf{I})$

3.3 Determine a norma $\mathcal{H}_2$ dos sistemas

a) $\begin{cases} x(k+1) = 0.5x(k) + 2w(k) \\ y(k) = 5x(k) \end{cases}$

b) $\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{cases}$

3.4 Mostre que a existência de $P = P' > 0$ que satisfaz qualquer uma das condições abaixo garante $\|H(z)\|_2^2 < \rho$ para o sistema discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned}$$

a) $A'PA - P + C'C \leq 0 \quad ; \quad \rho \geq \mathbf{Tr}(B'PB)$

b) $\begin{bmatrix} A'PA - P & C' \\ C & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad ; \quad \rho \geq \mathbf{Tr}(B'PB)$

c) $A'PA - P + C'C \leq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{I} & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(\sigma\mathbf{I})$

d) $\begin{bmatrix} P & A'P & C' \\ PA & P & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} X & B'P \\ PB & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(X)$

e) $\begin{bmatrix} P & AP & B \\ PA' & P & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{I} & CP \\ PC' & P \end{bmatrix} \geq 0 \quad ; \quad \rho = \mathbf{Tr}(\sigma\mathbf{I})$

3.5 Faça um programa para o cálculo da norma $\mathcal{H}_2$ por meio de LMIs, usando as condições baseadas nos gramianos de controlabilidade e de observabilidade e as condições aumentadas (Finsler). Gere 10 sistemas estáveis de várias dimensões e compare os valores obtidos pelos programas com o resultado da rotina `norm` do Matlab. Repita para o caso discreto.

3.6 Faça um programa que calcule a norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema a tempo contínuo por meio do cômputo da energia da resposta ao impulso, isto é, determinando

$$\|H\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} h_{ij}(t)^* h_{ij}(t) dt}$$

sendo p o número de saídas e m o número de entradas. O programa deve ter como entradas as matrizes A, B, C e D e o tempo de simulação (adotar 10 segundos como o tempo mínimo). Para o cálculo numérico da integral, recomenda-se usar a rotina `trapz`. Adote 0.01 segundos como passo de integração. A simulação da resposta ao impulso deve feita por meio da rotina `impulse`.

3.7 Seja o gramiano de controlabilidade de um sistema a tempo contínuo em termos de uma LMI

$$AP + PA' + BB' < 0$$

(a) Usando o Lema de Finsler, obtenha uma condição equivalente com variáveis de folga.

(b) Usando novamente o Lema de Finsler, obtenha uma LMI equivalente à condição obtida em (a) com mais variáveis de folga.

3.8 Usando o Lema da Projeção Recíproca (slide 33 da aula "Complemento de Schur, Transformações de Congruência, LMIs e Estabilidade") obtenha uma condição LMI equivalente para o gramiano de observabilidade

$$A'P + PA + C'C < 0$$

com variáveis adicionais.

3.9 Seja $L_c > 0$ a solução de

$$AL_c + L_cA' + C'C = 0$$

com A assintoticamente estável. Mostre que qualquer solução L de

$$AL + LA' + C'C < 0$$

é tal que $L > L_c$.