Lista 6

6.1 Seja a matriz politópica $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha \in \Delta_N$. Apresente um conjunto finito de LMIs para testar a estabilidade *Hurwitz* dessa matriz por meio da existência da seguinte função de Lyapunov $v(x) = x'P(\alpha)x$, com $P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1\alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02}$.

6.2 Aplique uma relaxação de Pólya nas condições LMIs obtidas no item anterior e apresente as novas LMIs. A relaxação deve ser aplicada tanto no teste $v(x) > 0$ quanto no teste $\dot{v}(x) < 0$.

6.3 Seja a matriz politópica $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha \in \Delta_N$. Apresente um conjunto finito de LMIs para testar a estabilidade *Schur* dessa matriz a partir das seguintes LMIs dependentes de parâmetros

$$P(\alpha) > 0, \qquad Q(\alpha) + X(\alpha)B(\alpha) + B(\alpha)'X(\alpha)' < 0$$

com

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} -P(\alpha) & 0 \\ 0 & P(\alpha) \end{bmatrix}, \quad X(\alpha) = \begin{bmatrix} X_1(\alpha) \\ X_2(\alpha) \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I \end{bmatrix},$$

e $X_1(\alpha) = \alpha_1 X_{11} + \alpha_2 X_{12}$, $X_2(\alpha) = \alpha_1 X_{21} + \alpha_2 X_{22}$, $P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1\alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02}$.

6.4 Certifique (apresentando a matriz $P(\alpha)$ encontrada) a estabilidade *Hurwitz* da seguinte matriz politópica

$$A(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 10 & -6 & 1 \\ -12 & -11 & -23 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -9 & -1 & -15 \\ 0 & -6 & 1 \\ 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}.$$

6.5 Certifique (apresentando a matriz $P(\alpha)$ encontrada) a estabilidade *Schur* da seguinte matriz politópica

$$A(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} -0.05 & 0.97 \\ -1.00 & 0.01 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1.68 & -1.44 \\ 0.94 & 0.22 \end{bmatrix}.$$

6.6 Mostre que o polinômio escalar

$$f(\alpha) = \alpha_1^2 - \frac{5}{4}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$$

é definido positivo para todo $\alpha \in \Delta_N$.

6.7 Seja $\mathcal{K}(N, g)$ o conjunto de N-uplas soluções da equação $k_1 + \cdots + k_N = g$. Gere os conjuntos $\mathcal{K}(2, 0)$, $\mathcal{K}(2, 1)$, $\mathcal{K}(2, 2)$, $\mathcal{K}(3, 2)$ e $\mathcal{K}(4, 2)$. Observando o comportamento das soluções, faça um programa genérico em Matlab para calcular $\mathcal{K}(N, 2)$ para qualquer $N > 1$.

6.8 Seja a matriz politópica $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$, $\alpha \in \Delta_N$ e as seguintes LMIs dependentes de parâmetros (estabilidade Hurwitz)

$$P(\alpha) > 0, \qquad Q(\alpha) + XB(\alpha) + B(\alpha)'X' < 0$$

com

$$Q(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad B(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & -I \end{bmatrix}$$

(a) Determine e programe um conjunto finito de LMIs (relaxação) para resolver as LMIs dependentes de parâmetros considerando $P(\alpha) = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.

(b) Repita o item (a) considerando agora $P(\alpha) = \alpha_1^2 P_{20} + \alpha_1\alpha_2 P_{11} + \alpha_2^2 P_{02}$.

(c) Gere 100 politopos estáveis (escolha n arbitrariamente) e aplique as LMIs obtidas nos itens (a) e (b).

(d) O número de politopos identificados como estáveis foi o mesmo? Se sim, apresente um argumento teórico que prove que as condições são equivalentes.