Lista 8 – Realimentação de estados

Matrizes A e B para testes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

8.1 Determine um ganho estabilizante $u(t) = Kx(t)$ para o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

com (A,B) dados por

a) (1) b) (2) c) (3) d) (4)

8.2 Determine um ganho $u(t) = Kx(t)$ para que o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

em malha fechada $A + BK$ tenha todos os autovalores (aproximadamente, com precisão de 0.1) em -1 com (A,B) dados por

a) (1) b) (2) c) (3) d) (4)

8.3 Determine um ganho estabilizante $u(k) = Kx(k)$ para o sistema linear

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

com (A,B) dados por

a) (1) b) (2) c) (3) d) (4)

8.4 Determine um ganho $u(k) = Kx(k)$ para que o sistema linear

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

em malha fechada $A + BK$ tenha todos os autovalores (aproximadamente, com precisão de 0.1) em 0

a) (1) b) (2) c) (3) d) (4)

8.5 Considere o problema de controle descentralizado e a estratégia proposta na aula (apenas suficiente). Sendo $K = ZW^{-1}$, construa uma rotina em matlab que determine as estruturas de Z e $W = W'$ em função da estrutura desejada para K. A rotina deverá receber como entrada uma matriz com a mesma dimensão de K, com uns nas posições em que devem existir ganhos e zeros nas posições com valores nulos. As matrizes Z e W resultantes devem seguir essa mesma convenção. Por exemplo, se $K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$, então

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Z} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{W}$$

Primeiro crie a rotina para tratar apenas sistemas de uma entrada. Depois estenda para o caso de múltiplas entradas.

8.6 Considere o sistema linear cujas matrizes (A,B) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 15 \\ 0 & -5 & 8 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Considerando o sistema contínuo no tempo, obtenha um controle descentralizado com a estrutura

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} \tag{5}$$

que estabilize o sistema. Considerando o sistema como discreto no tempo, determine o ganho descentralizado usando a variável de folga G.

8.7 Seja um sistema politópico a tempo contínuo com as matrizes dinâmica e de entrada de controle dadas por

$$A(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} -12.2 & -4.9 & -11.2 \\ -23.1 & -25.9 & -2.6 \\ 22.2 & 26.7 & -26.3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 7.3 & -3.5 & 13.1 \\ -6.4 & -6.6 & -9.0 \\ -15.0 & 14.5 & -15.6 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -9.7 & -0.7 & 19.8 \\ 5.5 & -17.2 & 1.1 \\ -3.3 & 13.6 & -19.4 \end{bmatrix}$$
$$B(\alpha) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0.7 \\ -0.5 \\ 1.9 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1.1 \\ -1.2 \\ -0.7 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \Lambda$$

Usando as condições de estabilização baseadas na estabilidade quadrática (Lema 19), lema de projeção (Lema 24) e lema de Finsler (Lema 25, $\xi = 1$), determine o maior valor de $\gamma \in \mathbb{R}^+$ (com duas casas de precisão) tal que a matriz dinâmica modificada $(A(\alpha) + \gamma \mathbf{I})$ seja estabilizável por cada uma dessas condições. Teste novamente a condição do lema de Finsler, usando os seguintes valores para o parâmetro escalar:

$$\xi \in \{10^{-6}, 10^{-5}, \ldots, 0.1, 1, 10, \ldots, 10^5, 10^6\}$$

Esses valores podem ser gerados pelo comando `logspace(-6,6,13)`.

8.8 Considere a base de 100 sistemas lineares politópicos a tempo contínuo com as dimensões $n = 2, \ldots, 4$, $N = 2, \ldots, 4$, $m = 1, \ldots, n-1$ disponível para *download* em: `http://www.dt.fee.unicamp.br/~ricfow/IA892/base_ssf.zip`. Aplique as condições de estabilização baseadas na estabilidade quadrática, lema de projeção e lema de Finsler nessa base de dados e verifique qual condição foi menos conservadora.

8.9 Considere um sistema linear politópico cujas matrizes vértices são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \; ; \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = B_{12} = \mathbf{I}_3 \; ; \quad C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando o sistema como contínuo no tempo:

a) Obtenha um ganho robusto de custo garantido $\mathscr{H}_2$

b) Obtenha um ganho robusto de custo garantido $\mathscr{H}_\infty$

Considerando o sistema como discreto no tempo:

c) Obtenha um ganho robusto de custo garantido $\mathscr{H}_2$, usando a síntese a partir da matriz de Lyapunov W e também a partir da matriz G

d) Obtenha um ganho robusto de custo garantido $\mathscr{H}_\infty$, usando a síntese a partir da matriz de Lyapunov W e também a partir da matriz G

8.10 Usando o Lema da Projeção Recíproca, produza uma condição de estabilização para o caso de sistemas discretos no tempo. Dica: use

$$-\begin{bmatrix} P & A'P \\ PA & P \end{bmatrix} = \bar{A}\bar{P} + \bar{P}\bar{A}', \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{I} & A' \\ 0 & \frac{1}{2}\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}$$

8.11 Apresente as condições LMIs do Lema 26 para N=2. Utilizando uma matriz de Lyapunov de grau dois dada por $W(\alpha) = \alpha_1^2 W_1 + \alpha_1\alpha_2\bar{W} + \alpha_2^2 W_2$, derive as novas condições LMIs para o Lema 26. Com base nos resultados obtidos, mostre que se não existir uma solução para o Lema 26, então também não existe uma solução para o Lema 26 com $W(\alpha)$ de grau dois. Em outros termos, o aumento do grau da matriz de Lyapunov não reduz o conservadorismo.