IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 3: Condições LMIs para norma $\mathscr{H}_2$

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

1^o Semestre 2024

Tópicos

Norma $\mathscr{H}_2$ para sistemas contínuos

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

com $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representando o estado, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ uma entrada exógena e $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida.

- Para que a norma $\mathscr{H}_2$ seja finita, não existe o termo de transmissão direta de $w(t)$ para a saída $y(t)$ e a matriz A precisa ter todos os autovalores com parte real negativa.

- A matriz de transferência de w para y é dada por (s é a variável da Transformada de Laplace)

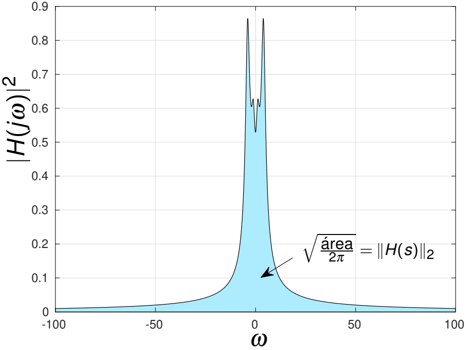
$$H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p1}(s) & \cdots & H_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

Definição Frequencial

A norma $\mathscr{H}_2$ é definida como

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} H_{ik}(j\omega)^* H_{ik}(j\omega)d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{Tr}\big(H(j\omega)^* H(j\omega)\big)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_i \sigma_i\big(H(j\omega)\big)^2 d\omega$$



$$H(s) = \frac{s^3+8s^2+21s+18}{s^4+4s^3+23s^2+38s+34}$$

$$\|H(s)\|_2 = 0.9463$$

Resposta ao Impulso

- Teorema de Parseval

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} H_{ik}(j\omega)^* H_{ik}(j\omega)d\omega =$$

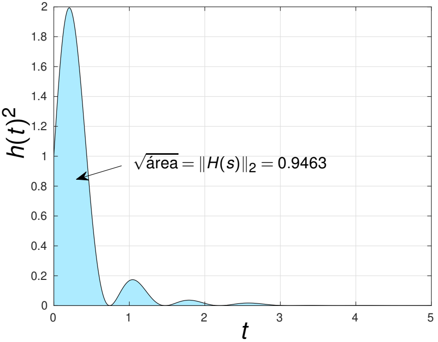
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} h_{ik}(t)^* h_{ik}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{Tr}\big(h(t)^* h(t)\big)dt$$

- Em sistemas SISO causais a norma $\mathscr{H}_2$ ao quadrado corresponde à integral do quadrado da resposta impulsiva

$$\|H(s)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} |h(t)|^2 dt}$$

Ilustração Gráfica

- A figura abaixo mostra a resposta ao impulso da mesma função de transferência $H(s)$ apresentada anteriormente.



- A norma $\mathscr{H}_2$ de um sistema conhecido pode ser computada pela função `norm(sis,2)` sendo `sis` um objeto criado com a função `ss` (ou `tf`).

Exemplo: `sis=ss(A,B,C,0)` com `A`,`B` e `C` matrizes dadas e `A` estável.

Norma $\mathscr{H}_2$: Espaço de Estados

- Considere o sistema (1). Como $H(s)$ é estável, então

$$\mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t) = \begin{cases} C\exp(At)B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

A norma $\mathscr{H}_2$ de $H(s)$ é dada por

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(h(t)^* h(t)\big)dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(h(t)h(t)^*\big)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(B^* \exp(A^* t)C^* C\exp(At)B\big)dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{Tr}\big(C\exp(At)BB^* \exp(A^* t)C^*\big)dt$$

Os gramianos de controlabilidade de (A, B) e de observabilidade de (A, C) são respectivamente dados por

$$L_c = \int_0^{+\infty} \exp(At)BB^* \exp(A^* t)dt \quad ; \quad L_o = \int_0^{+\infty} \exp(A^* t)C^* C\exp(At)dt$$

$$AL_c + L_c A^* + BB^* = \mathbf{0} \quad ; \quad A' L_o + L_o A + C^* C = \mathbf{0}$$

e portanto tem-se $\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B^* L_o B) = \mathbf{Tr}(CL_c C^*)$

Norma $\mathscr{H}_2$ por LMIs

- A norma $\mathscr{H}_2$ pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização

$$\min_{P = P' > 0} \quad \mathbf{Tr}(B'PB) \;=\; \mathbf{Tr}(BB'P)$$

sujeito a

$$A'P + PA + C'C < 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min_{W = W' > 0} \quad \mathbf{Tr}(CWC') \;=\; \mathbf{Tr}(C'CW)$$

sujeito a

$$AW + WA' + BB' < 0$$

- Na solução ótima $\|H(s)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B'PB) = \mathbf{Tr}(CWC')$

Lema de Finsler: condições estendidas

- Usando o Lema de Finsler, condições equivalentes para o cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ podem ser obtidas

  - $\exists X \in \mathbb{R}^{p \times p}, W \in \mathbb{R}^{n \times n}, W = W' > 0$ tais que

$$X > CWC'$$

se e somente se existirem $X \in \mathbb{R}^{p \times p}, W \in \mathbb{R}^{n \times n}, W = W' > 0$, $H \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} CH' + HC' - X & CJ - H \\ J'C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} < 0$$

pois

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ C' \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} CH' + HC' - X & CJ - H \\ J'C' - H' & W - J - J' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ C' \end{bmatrix} =$$

$$= -X + CWC'$$

Gramiano de Controlabilidade com Variáveis de Folga

- $\exists W \in \mathbb{R}^{n\times n}, W = W' > 0$ tal que

$$AW + WA' + BB' < 0 \iff \begin{bmatrix} AW + WA' & B \\ B' & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

se, e somente se, existirem $W \in \mathbb{R}^{n\times n}, W = W' > 0$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} AF' + FA' & W + AG - F & B \\ W + G'A' - F' & -G - G' & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{2}$$

Prova: ($\Leftarrow$) Aplicando a transformação de congruência

$$U \begin{bmatrix} AF' + FA' & W + AG - F & B \\ W + G'A' - F' & -G - G' & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} U' = \begin{bmatrix} AW + WA' & B \\ B' & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

com $U = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. ($\Rightarrow$) $F = W$, $G = \varepsilon I$ (ε suficientemente pequeno) e algumas manipulações algébricas.

Cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ para sistemas discretos no tempo

Considere o sistema linear invariante no tempo a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{3}$$

com $x(k) \in \mathbb{R}^n$ representando o estado, $w(k) \in \mathbb{R}^m$ uma entrada exógena e $y(k) \in \mathbb{R}^p$ a saída medida.

- No caso discreto, admite-se que a matriz de transmissão direta D possa ser diferente de zero. Nesse caso, a norma $\mathscr{H}_2$ do sistema é acrescida do valor $\mathbf{Tr}(D'D) = \mathbf{Tr}(DD')$. A matriz A deve ter todos os autovalores no interior do círculo unitário para que a norma $\mathscr{H}_2$ seja finita.

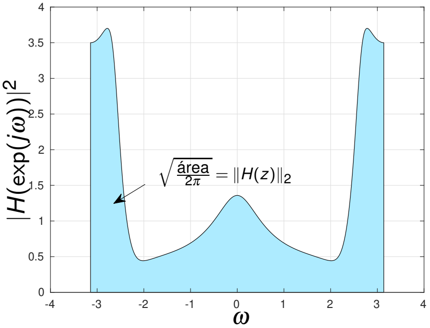
- A matriz de transferência de w para y do sistema discreto (3) é dada por (z é a variável da Transformada Z)

$$H(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B$$

Norma $\mathscr{H}_2$ - Definição Frequencial

- A norma $\mathscr{H}_2$ é definida como

$$\|H(z)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathbf{Tr}[\big(H(\exp(j\omega))^* H(\exp(j\omega))\big)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_i \sigma_i\big(H(\exp(j\omega))\big)d\omega$$



$$H(z) = \frac{0.6z^2 + 0.9z + 1}{z^4 + 1.3z^3 + 0.21z^2 - 0.48z - 0.19}$$

$$\|H(z)\|_2 = 1.7152$$

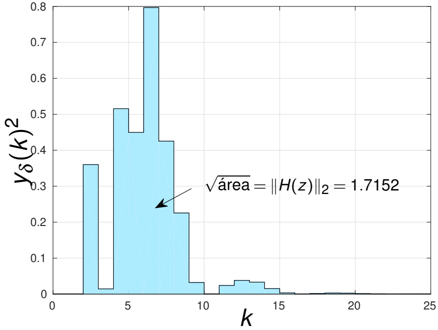
Resposta ao Impulso

- Caracterização no espaço de estados → Resposta ao impulso:

$$w(k) = \delta(k) = \begin{cases} 1\,, & k = 0 \\ 0\,, & k > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y_\delta(k) = \begin{cases} 0 & , \quad k = 0 \\ CA^{k-1}B & , \quad k > 0 \end{cases}$$

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} y_\delta(k)^* y_\delta(k)\Big) = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} y_\delta(k) y_\delta(k)^*\Big)$$

- A figura abaixo mostra o quadrado da resposta ao impulso do mesmo $H(z)$ apresentado anteriormente (representação por escada).



Caracterização da norma $\mathscr{H}_2$ em termos dos Gramianos

$$\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} B^* A^{k-1^*} C^* C A^{k-1} B\Big) = \mathbf{Tr}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} C A^{k-1} B B^* A^{k-1^*} C^*\Big)$$

$$= \mathbf{Tr}\Big(B^* \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} A^{k^*} C^* C A^k}_{L_o} B\Big) = \mathbf{Tr}\Big(C \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} A^k B B^* A^{k^*}}_{L_c} C^*\Big)$$

- L_o é o gramiano de observabilidade e L_c é o gramiano de controlabilidade do sistema discreto (3), soluções respectivas das equações

$$A^* L_o A - L_o + C^* C = \mathbf{0}$$

$$A L_c A^* - L_c + B B^* = \mathbf{0}$$

e, portanto, $\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B^* L_o B) = \mathbf{Tr}(C L_c C^*)$

Norma $\mathscr{H}_2$: LMIs

- A norma $\mathscr{H}_2$ pode ser computada por meio de um procedimento convexo de otimização.

$$\min_{P=P'>0} \quad \mathbf{Tr}(B'PB) = \mathbf{Tr}(BB'P)$$

sujeito a

$$A'PA - P + C'C < 0$$

ou, de maneira equivalente,

$$\min_{W=W'>0} \quad \mathbf{Tr}(CWC') = \mathbf{Tr}(C'CW)$$

sujeito a

$$AWA' - W + BB' < 0$$

- Na solução ótima $\|H(z)\|_2^2 = \mathbf{Tr}(B'PB) = \mathbf{Tr}(CWC')$

Lema de Finsler: condições estendidas

- Usando o Lema de Finsler, condições equivalentes para o cômputo de norma $\mathscr{H}_2$ podem ser obtidas
  - $\exists X \in \mathbb{R}^{p\times p}, W \in \mathbb{R}^{n\times n}, W = W' > 0$ tais que

$$X > CWC' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & CW \\ WC' & W \end{bmatrix} > 0$$

se e somente se existirem $X \in \mathbb{R}^{p\times p}, W \in \mathbb{R}^{n\times n}, W = W' > 0,\ Y_1 \in \mathbb{R}^{n\times n},\ Y_2 \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $Y_3 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W & Y_1C' & W - Y_1 \\ CY_1' & X + Y_2C' + CY_2' & -Y_2 + CY_3' \\ W - Y_1' & -Y_2' + Y_3C' & -Y_3 - Y_3' \end{bmatrix} > 0$$

pois

$$\begin{bmatrix} 0 & I & C \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & Y_1C' & W - Y_1 \\ CY_1' & X + Y_2C' + CY_2' & -Y_2 + CY_3' \\ W - Y_1' & -Y_2' + Y_3C' & -Y_3 - Y_3' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \\ C' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & CW \\ WC' & W \end{bmatrix}$$

Condição Com Variáveis Adicionais

- $\exists W \in \mathbb{R}^{n\times n}, W = W' > 0$ tal que $AWA' - W + BB' < 0$ ou, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} W & AW & B \\ WA' & W & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \tag{4}$$

se, e somente se, existirem $W = W' > 0$, $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} W - AF' - FA' & F - AG & B \\ F' - G'A' & -W + G + G' & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

Prova: ($\Leftarrow$) Aplicando a transformação de congruência

$$U \begin{bmatrix} W - AF' - FA' & F - AG & B \\ F' - G'A' & -W + G + G' & \mathbf{0} \\ B' & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} U' = \begin{bmatrix} W - AWA' & B \\ B' & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

com $U = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$. ($\Rightarrow$) Note que com $F = \mathbf{0}$ e $G = G' = W$ recai-se na LMI (4).