

# IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares

## por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 7: Sistemas Variantes no Tempo

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação  
Universidade Estadual de Campinas

2<sup>o</sup> Semestre 2022

- 1 Sistemas Politópicos Variantes no Tempo
- 2 Taxas de Variações Limitadas
- 3 Condições de Estabilidade
- 4 Sistemas a Tempo Discreto
- 5 Condições LMIs Para Variações Arbitrárias
- 6 Condições LMIs Para Variações Limitadas
- 7 Apêndice

## Sistemas lineares variantes no tempo

- Considere o sistema linear contínuo no tempo

$$\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t), \quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o estado. O vetor de parâmetros variantes no tempo  $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$  pertence ao simplex unitário  $\Lambda_N$  para todo  $t \geq 0$ . A matriz dinâmica do sistema pertence ao politopo

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) A_i, \alpha \in \Lambda_N \right\}$$

com  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes dadas.

**Teorema 1 (Lyapunov)**

*A origem  $x(t) = 0$  é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (1) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se existir uma matriz simétrica  $X(\alpha(t)) > 0$  dependente de parâmetros continuamente diferenciável verificando a desigualdade*

$$A(\alpha(t))'X(\alpha(t)) + X(\alpha(t))A(\alpha(t)) + \nabla_{\alpha}X(\alpha(t))\frac{d\alpha(t)}{dt} < \mathbf{0}$$

*para todo  $\alpha \in \Lambda_N$ .*

# Comentários

## Observações

- A prova do Teorema 1 baseia-se na existência da função de Lyapunov  $v(x, \alpha) = x'X(\alpha(t))x$ , que é quadrática nos estados e depende arbitrariamente de  $\alpha(t)$ . Para mais detalhes veja (Khalil, 1996).
- Caso não se tenha nenhuma informação do comportamento dos parâmetros em relação ao tempo, ou seja, se  $d\alpha(t)/dt$  é arbitrário, o uso de funções de Lyapunov com dependência em  $\alpha(t)$  torna-se inviável. Uma saída simples é considerar a matriz  $X(\alpha(t))$  independente de parâmetros, i.e.,  $X(\alpha(t)) = X$ , gerando os testes baseados na *estabilidade quadrática*.
- Outras estratégias: (i) considerar funções de Lyapunov polinomiais de grau arbitrário nos estados usando testes de positividade baseados em técnicas de soma de quadrados; (ii) considerar funções de Lyapunov quadráticas por partes (*piecewise*).

## $d\alpha(t)/dt$ conhecido

Caso tenha-se alguma informação sobre a variação dos parâmetros no tempo, como por exemplo a taxa máxima de variação, o uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é viabilizado.

## Sistemas politópicos com taxas de variação limitadas I

● Suponha que as taxas de variação dos parâmetros são limitadas e dadas na forma

$$\underline{b}_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \bar{b}_i, \bar{b}_i > \underline{b}_i, 0 \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \forall t \geq 0 \quad (2)$$

Note que nesta modelagem o caso invariante no tempo, isto é,  $\dot{\alpha}_i = 0$  está contido na análise. Como consequência, a estabilidade Hurwitz de  $A(\alpha)$  é uma **condição necessária** para a estabilidade de  $A(\alpha(t))$ .

Derivando em relação ao tempo a restrição de soma unitária dos parâmetros, tem-se

$$\dot{\alpha}_1(t) + \dot{\alpha}_2(t) + \dots + \dot{\alpha}_N(t) = 0 \quad (3)$$

Assim o domínio no qual os  $\dot{\alpha}_i(t)$  assumem valores pode ser determinado por meio da construção da região definida pelas restrições lineares (2) e (3) (interseção entre um hiper-cubo e um hiperplano). Esta região é **convexa** e pode ser representada por um **politopo**.

## Sistemas politópicos com taxas de variação limitadas II

Note que as restrições (2) e (3) podem ser expressas na forma  $A_d x \leq b_d$  e  $A_e x = b_e$  (representações padrões de programação linear), com

$$A_d = I_N \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_d = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ -\underline{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_N \\ -\underline{b}_N \end{bmatrix}, \quad A_e = \underbrace{[1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]}_{N \text{ vezes}}, \quad b_e = 0$$

O problema de encontrar os vértices da região politópica a partir das restrições lineares é conhecido como problema de enumeração de vértices. Uma implementação computacional de um algoritmo que resolve o problema está disponível no *Multi-Parametric Toolbox* (MPT) por meio do script `Polyhedron`.

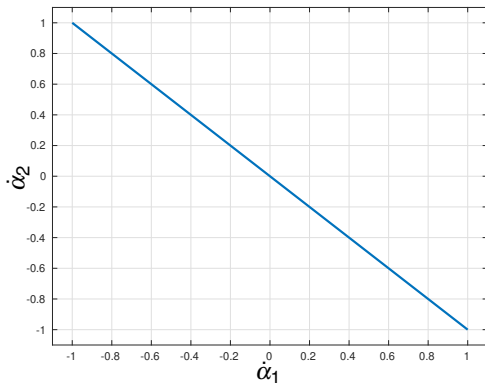
## Exemplo N=2

● Considere os limitantes  $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 2$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 3$ . Utilizando o MPT, obtém-se os seguintes vértices para a região politópica em que  $\dot{\alpha}_1(t)$  e  $\dot{\alpha}_2(t)$  assumem valores

$$h^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad h^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} &= \beta_1 h^1 + \beta_2 h^2 \\ &= \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \beta &\in \Lambda_2 \end{aligned}$$



## Exemplos N=3 I

● Primeiramente considere os limitantes  $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 1$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 1$  e  $-1 \leq \dot{\alpha}_3(t) \leq 1$ . Utilizando o MPT, obtém-se os seguintes vértices para a região politópica em que  $\dot{\alpha}_1(t)$ ,  $\dot{\alpha}_2(t)$  e  $\dot{\alpha}_3(t)$  assumem valores

$$[h^1 \quad h^2 \quad \dots \quad h^6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

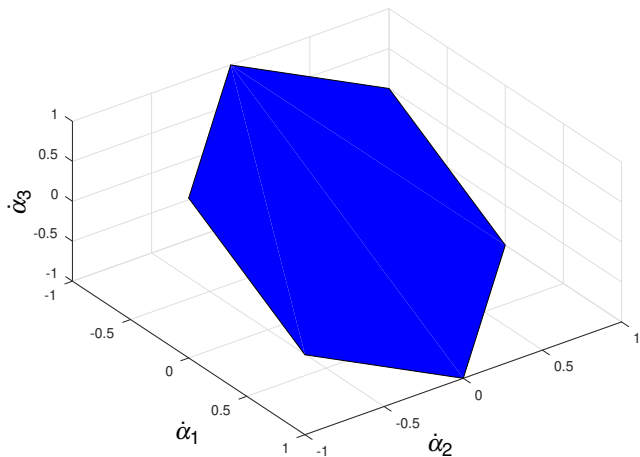
Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_6 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \Lambda_6$$

A região factível é ilustrada na próxima figura.



## Exemplos N=3 II



## Exemplos N=3 III

Agora considere os seguintes limitantes  $-2 \leq \dot{\alpha}_3(t) \leq 2$  (os limitantes de  $\dot{\alpha}_1(t)$  e  $\dot{\alpha}_2(t)$  permanecem os mesmos). Os vértices da região politópica em que  $\dot{\alpha}_1(t)$ ,  $\dot{\alpha}_2(t)$  e  $\dot{\alpha}_3(t)$  assumem valores são

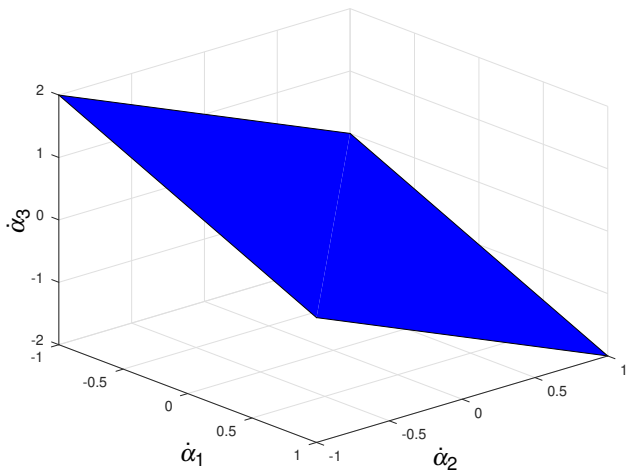
$$[h^1 \quad h^2 \quad \dots \quad h^6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \Lambda_4$$

A região factível é ilustrada na próxima figura.

## Exemplos N=3 IV



## Generalização para N arbitrário I

## Generalização

A derivada de  $\alpha(t)$  em relação ao tempo, denotada por  $\dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^N$ , existe e pertence ao conjunto convexo

$$\mathcal{D} = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^N : \delta = \text{co}\{h^1, \dots, h^M\}, \sum_{i=1}^N h_i^j = 0, j = 1, \dots, M \right\}$$

definido como a combinação convexa dos vetores  $h^j$ ,  $j = 1, \dots, M$ , dados a priori. Note que a soma nula das linhas de  $h^j$  garante que (3) é atendida.

Generalização para  $N$  arbitrário II

## Comentários

- Como observado, o número de vetores soluções **pode variar** em função dos valores dos limitantes.
- Um algoritmo genérico para a construção dos vetores  $h^j$  pode ser construído usando-se recursão (veja apêndice). Contudo, a utilização do MPT é preferível (resolve o problema com complexidade polinomial).
- Em média, o número de colunas  $h^j$  é dado por  $2^{N-1}$ , o que dificulta o tratamento de sistemas com um grande número de parâmetros.

# Derivada da matriz de Lyapunov

- Para fins ilustrativos, considere a seguinte matriz de Lyapunov linearmente dependente de parâmetros

$$P(\alpha(t)) = \alpha_1(t)P_1 + \alpha_2(t)P_2 + \cdots + \alpha_N(t)P_N$$

A derivada de  $P(\alpha(t))$  em relação ao tempo resulta em

$$\nabla_{\alpha} P(\alpha(t)) \frac{d\alpha(t)}{dt} = \dot{P}(\alpha(t)) = \dot{\alpha}_1(t)P_1 + \dot{\alpha}_2(t)P_2 + \cdots + \dot{\alpha}_N(t)P_N = \sum_{i=1}^N \dot{\alpha}_i(t)P_i$$

com  $\dot{\alpha}_i(t) = d\alpha_i(t)/dt$ . Usando a hipótese de que  $\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{D}$ ,  $\forall t \geq 0$ , tem-se

$$\dot{P}(\alpha) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \beta_j h_i^j P_i, \quad \beta \in \Lambda_M$$

- $\dot{P}(\alpha)$  depende linearmente de  $\beta \in \Lambda_M$  e não depende de  $\alpha \in \Lambda_N$ .
- Adaptar as condições de estabilidade robusta baseadas em LMIs dependentes de parâmetros (caso invariante no tempo) é imediato, bastando incorporar o termo  $\dot{P}(\alpha)$ .

## Teorema 2

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$A_i' P_i + P_i A_i + \sum_{\ell=1}^N h_{\ell}^j P_{\ell} < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$$

$$A_i' P_k + P_k A_i + A_k' P_i + P_i A_k + 2 \sum_{\ell=1}^N h_{\ell}^j P_{\ell} < \mathbf{0},$$

$$i = 1, \dots, N-1, k = i+1, \dots, N, j = 1, \dots, M$$

então a matriz de Lyapunov (associada à função de Lyapunov  $v(x, \alpha) = x' P(\alpha(t)) x$ )

$$P(\alpha(t)) = \alpha_1(t) P_1 + \alpha_2(t) P_2 + \dots + \alpha_N(t) P_N \quad (4)$$

garante que a origem  $x(t) = 0$  é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (1) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  e para todo  $\dot{\alpha} \in \mathcal{D}$ .

## Condições LMIs: prova

- Com a matriz de Lyapunov dada em (4), tem-se

$$A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^2 \dot{P}(\alpha) = \sum_{j=1}^M \beta_j \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \left( A_i'P_i + P_iA_i + \sum_{\ell=1}^N h_{\ell}^j P_{\ell} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N \alpha_i \alpha_k \left( A_i'P_k + P_kA_i + A_k'P_i + P_iA_k + 2 \sum_{\ell=1}^N h_{\ell}^j P_{\ell} \right) \right)$$

- Note que o lado direito é um polinômio multi-afim, isto é, polinomial homogêneo de grau dois em  $\alpha$  e polinomial homogêneo de grau um em  $\beta$ . Para finalizar a prova, note que as restrições do Teorema 2 garantem que esse polinômio é definido negativo para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  e  $\beta \in \Lambda_M$ .



## Exemplo

- Considere o sistema linear variante no tempo

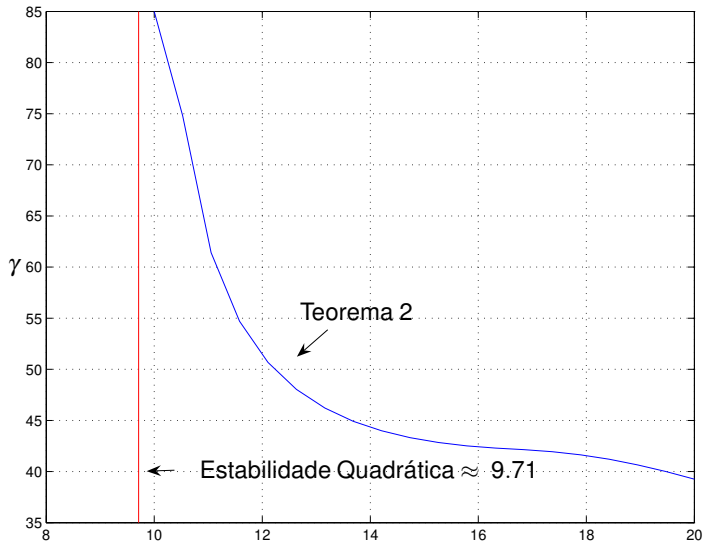
$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3-p(t) & -2 \end{bmatrix} x(t), \quad 0 \leq p(t) \leq k$$

- O objetivo é analisar a estabilidade robusta desse sistema computando a máxima taxa de variação  $\gamma$  do parâmetro  $p(t)$ , tal que a estabilidade é garantida para qualquer  $|\dot{p}(t)| \leq \gamma$ . A simulação é feita para a faixa  $k \in [10 \ 20]$ . Os resultados são mostrados na próxima figura.

- A matriz dinâmica desse sistema não se encontra na representação politópica. Como o sistema apresenta apenas um parâmetro incerto, a conversão para a representação politópica é imediata. A vértice  $A_1$  é obtido tomando-se o limite inferior de  $p(t)$  e o vértice  $A_2$  tomando-se o limite superior. A conversão da taxa de variação dos parâmetros segue das relações  $|\dot{\alpha}_1(t)| = |\dot{\alpha}_2(t)| = |\dot{p}(t)|/(\bar{p} - \underline{p}) \leq \gamma$ .

## Exemplo

## ● Resultados:



## Comentários

- Os resultados do Teorema 2 podem ser melhorados considerando-se a matriz de Lyapunov  $P(\alpha)$  como um polinômio homogêneo de grau arbitrário nos parâmetros incertos. Relaxações de Pólya também podem ser usadas.
- Mesmo aumentando o grau da matriz de Lyapunov e usando as relaxações de Pólya, as condições não vão tender para a necessidade, uma vez que não foi provado que uma função de Lyapunov **quadrática nos estados** com  $P(\alpha(t))$  polinomial em  $\alpha(t)$  é necessária e suficiente para garantir estabilidade.
- Para trabalhar com matrizes de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau arbitrário é necessário programar um algoritmo que faça a derivada de  $P_g(\alpha(t))$  em relação a  $\alpha$  e em relação ao tempo de maneira sistemática e genérica.
- Requisitos de desempenho, como as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , podem ser incorporados às condições.

## Sistemas Discretos

- Considere o sistema linear discreto no tempo

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k), \quad (5)$$

sendo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  o estado. O vetor de parâmetros variantes no tempo  $\alpha(k) \in \mathbb{R}^N$  pertence ao simplex unitário  $\Lambda_N$  para todo  $k \geq 0$ . A matriz dinâmica do sistema pertence ao politopo

$$\mathcal{A} = \left\{ A(\alpha) : A(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(k) A_i, \alpha \in \Lambda_N \right\}$$

com  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes dadas.

## Teorema 3 (Lyapunov)

*A origem  $x(k) = 0$  é um ponto de equilíbrio robustamente estável para o sistema (5) para todo  $\alpha \in \Lambda_N$  se existir uma sequência limitada de matrizes simétricas  $P(\alpha(k)) > \mathbf{0}$  dependente de parâmetros verificando a desigualdade*

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))'P(\alpha(k+1)) \\ * & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

*para todo  $\alpha(k) \in \Lambda_N$ .*

## Comentários

- A prova do Teorema 3 segue da avaliação da primeira diferença da função de Lyapunov  $v(x(k), \alpha(k)) = x(k)'P(\alpha(k))x(k)$  ao longo das soluções do sistema (5) e aplicando-se um complemento de Schur.
- Para transformar as LMIs dependentes de parâmetros do Teorema 3 em LMIs convencionais é necessário impor uma estrutura particular para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha(k))$ . Por exemplo  $P(\alpha(k)) = P$  (estabilidade quadrática) ou dependendo linearmente em  $\alpha(k)$ , isto é,  $P(\alpha(k)) = \alpha_1(k)P_1 + \dots + \alpha_N(k)P_N$ .
- O caso discreto apresenta características particulares nas situações: (i)  $\alpha(k)$  varia “arbitrariamente” entre dois instantes de tempo; (ii)  $\alpha(k)$  possui taxa de variação limitada entre dois instantes de tempo.
- Note que em sistemas discretos obtidos da discretização de uma planta contínua, o tempo de amostragem tem relação direta com a máxima taxa de variação permitida entre dois instantes de tempo.

## Condições LMIs (taxas arbitrárias)

- Considere o caso em que  $\alpha(k)$  varia arbitrariamente entre dois instantes de tempo, i.e.  $\alpha(k+1) = \beta(k)$ ,  $\beta(k) \in \Lambda_N$ .

**Teorema 4** (Daafouz & Bernussou, 2001)

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$  tais que as seguintes LMIs são verificadas

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i' P_j \\ \star & P_j \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N$$

então o sistema (5) é robustamente estável.

- Prova: Multiplique as desigualdades por  $\alpha_i(k)\beta_j(k)$  e some para obter

$$\begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))' P(\beta(k)) \\ \star & P(\beta(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\alpha(k)) & A(\alpha(k))' P(\alpha(k+1)) \\ \star & P(\alpha(k+1)) \end{bmatrix} > \mathbf{0}$$

cuja factibilidade fornece  $P(\alpha(k)) > \mathbf{0}$ , garantindo a estabilidade robusta do sistema para toda variação arbitrária de  $\alpha(k) \in \Lambda_N$ .

## Comentários

● Caso as condições do Teorema 4 não encontrem uma solução, então condições baseadas em estruturas polinomiais homogêneas de grau arbitrário  $g$  para a matriz de Lyapunov  $P(\alpha(k))$  também não encontrarão uma solução. Essa característica deve-se ao fato de que  $\alpha(k+1) = \beta(k)$  pois o produto  $A(\alpha(k))'P(\beta(k))$  tem a propriedade de preservar os monômios resultantes de  $g = 1$  qualquer que seja  $g > 1$ . Note que as LMIs geradas (restrições) são os coeficientes dos monômios.

● Uma maneira de obter testes menos conservadores para o caso de variações arbitrárias de  $\alpha(k)$  é considerar matrizes de Lyapunov que dependem de maneira “multi-afim” nos instantes de tempos sucessivos de  $\alpha(k)$ . Por exemplo, considere a seguinte matriz de Lyapunov

$$P(\alpha(k), \alpha(k+1)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(k) \alpha_j(k+1) P_{ij}$$

Nesse caso, a matriz de Lyapunov candidata depende do instante atual  $k$  e do próximo instante  $k+1$ . Note que agora o número de variáveis  $P_{ij}$  é  $N^2$ .

## Condições LMIs

**Teorema 5** (J.-W. Lee, 2006)

Se existirem matrizes simétricas definidas positivas  $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ , tais que as seguintes LMIs são verificadas

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_i' P_{j\ell} \\ \star & P_{j\ell} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N, \ell = 1, \dots, N$$

então o sistema (5) é robustamente estável.

● As condições do Teorema 5 são menos conservadoras do que as condições do Teorema 4, inclusive contendo-as como um caso particular a partir da escolha  $P_{ij} = P_i$ ,  $P_{j\ell} = P_j$ .



## Condições LMIs — Exemplo

- Considere  $N = 2$  e

$$x(k+1) = (\alpha_1(k)A_1 + \alpha_2(k)A_2)x(k), \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

O objetivo é determinar o maior valor de  $\mu$  tal que o sistema é robustamente estável. O Teorema 4 encontra  $\mu_{max} = 0.4776$  e o Teorema 5 encontra  $\mu_{max} = 0.5131$ .

## Comentários

● A estratégia de considerar a matriz de Lyapunov dependendo de mais de um instante de tempo pode ser generalizada para  $M \in \mathbb{N}$  instantes de tempos à frente. Isto é,

$$P(\alpha(k), \dots, \alpha(k+M)) = \sum_{i_1=1}^N \cdots \sum_{i_M=1}^N \alpha_{i_1}(k) \cdots \alpha_{i_M}(k+M) P_{i_1 \dots i_M} \quad (6)$$

● Se o sistema for robustamente estável, sempre existirá uma matriz de Lyapunov dada por (6) garantindo a estabilidade para um  $M$  finito. Esse resultado caracteriza um condição de estabilidade semi-decidível. Para mais detalhes veja

J.-W. Lee and G. E. Dullerud, "Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems," *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 205–218, February 2006.

● O número de variáveis e o número de linhas de LMIs **crece exponencialmente** com  $M$ .

## Condições LMIs (taxas limitadas)

- Considere novamente o sistema

$$x(k+1) = A(\alpha(k))x(k)$$

com  $\alpha(k) \in \Lambda_N$  e  $A(\alpha)$  pertencente ao politopo  $\mathcal{A}$ .

A taxa de variação dos parâmetros incertos é dada por

$$\Delta\alpha_i(k) = \alpha_i(k+1) - \alpha_i(k), \quad i = 1, \dots, N$$

e, como  $\alpha(k) \in \Lambda_N$ , tem-se que

$$\sum_{i=1}^N \Delta\alpha_i(k) = 0.$$

Primeiramente, assume-se que  $\Delta\alpha_i(k)$  é limitado e satisfaz a condição

$$-1 \leq \underline{b}_i \leq \Delta\alpha_i(k) \leq \bar{b}_i \leq 1, \quad \bar{b}_i > \underline{b}_i, \quad 0 \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i], \quad \underline{b}_i, \bar{b}_i \in \mathbb{R}$$

## Comentários (taxas limitadas)

- O caso  $\bar{b}_i = \underline{b}_i = 0$  (parâmetros incertos fixos) corresponde ao caso clássico de estabilidade robusta para sistemas discretos invariantes no tempo com incertezas politópicas. Relaxações LMIs com convergência garantida podem ser usadas para construir soluções polinomiais homogêneas de grau arbitrário que certificam a estabilidade robusta do sistema.
- O caso  $\bar{b}_i = -\underline{b}_i = 1$ , em modelos politópicos, corresponde a variações arbitrárias do instante  $k$  para o instante  $k + 1$  dentro do simplex. Esse caso foi tratado primeiramente com funções de Lyapunov afins e, posteriormente, com funções multi-afins nos instantes sucessivos.
- O caso  $-1 < \underline{b}_i < \bar{u}_i < 1$  merece tratamento especial, principalmente pelo fato de que em sistemas discretos variantes no tempo a variação máxima  $\Delta\alpha(k)$  depende do valor do parâmetro  $\alpha(k)$  no instante  $k$ .

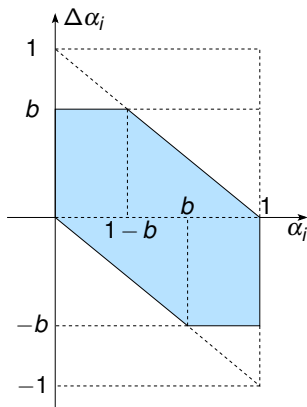
## Modelo para os parâmetros

- Se  $\Delta\alpha_i(k)$  for considerado independente de  $\alpha_i(k)$ , introduz-se conservadorismo no modelo.

Como ilustrado na figura ao lado ( $\bar{b}_i = -\underline{b}_i = b$ ), os valores factíveis de  $\Delta\alpha_i(k)$  (área escura) dependem dos valores de  $\alpha_i(k)$ . Essa é uma diferença importante entre os modelos de sistemas contínuos e discretos, no caso de parâmetros variantes no tempo.

A obtenção dos vértices do hexágono pode ser realizada como no caso contínuo, isto é, por meio da enumeração dos vértices associados às restrições lineares

$$0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad -b \leq \Delta\alpha_i \leq b, \quad 0 \leq \alpha_i + \Delta\alpha_i \leq 1$$



## Modelo para os parâmetros — produto cartesiano

- Na figura, qualquer par  $(\alpha_i, \Delta\alpha_i)$  pertence ao polítopo  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  dado por

$$\Gamma_i \triangleq \left\{ \delta \in \mathbb{R}^2 : \delta = \sum_{j=1}^6 \lambda_j h_j, \quad \lambda \in \Lambda_6 \right\}$$

$$[h_1 \quad \dots \quad h_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1-b & 1 & 1 & b \\ 0 & b & b & 0 & -b & -b \end{bmatrix}$$

ou seja,  $\Gamma_i$  é o envelope convexo dos pontos extremos (vértices) da área factível.

Modelo para os parâmetros — espaço  $\gamma$  I

● Para modelar o espaço paramétrico completo, isto é,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_N, \Delta\alpha_1, \dots, \Delta\alpha_N)$ , basta considerar as restrições lineares  $\mathbb{A}x \leq b$ ,  $\mathbb{A}_e x = b_e$  com

$$x \triangleq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \Delta\alpha_1 \\ \vdots \\ \Delta\alpha_N \end{bmatrix}, \quad \mathbb{A} \triangleq \begin{bmatrix} \text{diag}(I_N \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, I_N \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) \\ \left[ I_N \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad I_N \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \end{bmatrix}, \quad b \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{N \times 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{b}_1 \\ -\underline{b}_1 \\ \vdots \\ \bar{b}_N \\ -\underline{b}_N \\ \mathbb{1}_{N \times 1} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbb{A}_e \triangleq \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{1 \times N} & \mathbf{0}_{1 \times N} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & \mathbb{1}_{1 \times N} \end{bmatrix}, \quad b_e \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

e obter os vértices do polítopo resultante por meio de um algoritmo de enumeração de vértices (*script* `Polyhedron` do MPT).

O polítopo resultante, chamado  $\Gamma$ , é representado no caso geral por

$$\Gamma = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^{2N} : \delta = \sum_{j=1}^M \lambda_j h^j, \quad \lambda \in \Lambda_M \right\}$$

Modelo para os parâmetros — espaço  $\gamma$  II

sendo  $h^j \in \mathbb{R}^{2N}$  os vértices do politopo. De maneira geral, o número de vértices  $M$  cresce como função de  $N$ .

Nessa nova modelagem, tanto  $\alpha$  quanto  $\Delta\alpha$  são tratados de **maneira conjunta** em um espaço aumentado, chamado espaço  $\gamma$ , de dimensão  $2N$ .



## Modelo para os parâmetros — exemplo

● Considere, por exemplo,  $N = 2$ . Os vértices do politopo  $\Gamma$ , construído a partir de  $|\Delta\alpha_1| = |\Delta\alpha_2| \leq b$  (limitantes simétricos e iguais) são dados por

$$[h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_M] = \left[ \begin{array}{cccccc} f_1 & f_2 & \dots & f_M \\ g_1 & g_2 & \dots & g_M \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & b & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1-b & b \\ 0 & -b & 0 & b & -b & b \\ 0 & b & 0 & -b & b & -b \end{array} \right],$$

com  $M = 6$ . O primeiro passo para tratar uma LMI dependente dos parâmetros  $\alpha$  e  $\Delta\alpha$  é re-escrever as LMIs no espaço  $\gamma$ . Da definição de  $\Gamma$ , observa-se que  $(\alpha, \Delta\alpha)$  e  $\gamma$  relacionam-se por uma transformação linear

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \Delta\alpha \end{pmatrix} = H\gamma, \quad H = [h_1 \quad \dots \quad h_M], \quad \gamma \in \Lambda_M.$$

ou mais precisamente

$$\alpha = \sum_{j=1}^M f_j \gamma_j, \quad \Delta\alpha = \sum_{j=1}^M g_j \gamma_j$$

No exemplo, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + b\gamma_5 + (1-b)\gamma_6, & \alpha_2 &= \gamma_3 + \gamma_4 + (1-b)\gamma_5 + b\gamma_6 \\ \Delta\alpha_1 &= -b\gamma_2 + b\gamma_4 - b\gamma_5 + b\gamma_6, & \Delta\alpha_2 &= b\gamma_2 - b\gamma_4 + b\gamma_5 - b\gamma_6. \end{aligned}$$

## Funções de Lyapunov para estabilidade

● A estabilidade de sistemas discretos variantes no tempo com taxas limitadas pode ser estudada por meio de funções de Lyapunov.

### Classes de funções de Lyapunov

- Funções de Lyapunov multi-afins nos instantes sucessivos de tempo de  $k$  até  $k + M$  (dependentes de caminho);
- Funções de Lyapunov polinomiais homogêneas de grau  $g$ ;
- Combinações das duas (i.e., multipolinomiais em instantes sucessivos).

Uma vez definida a estrutura, deve-se fazer um *lifting* da LMI dependente de parâmetros para o espaço  $\gamma$ , ou seja,  $A(\alpha)$ ,  $P(\alpha)$  e  $P(\alpha + \Delta\alpha)$  devem ser re-escritos em termos de  $\gamma \in \Delta_M$ .

No caso da estrutura dependente de caminho,  $\Delta\alpha(k+1), \Delta\alpha(k+2), \dots, \Delta\alpha(k+L-1)$  também precisam ser expressos em termos de  $\gamma$ . Nesses casos é possível estender as matrizes dadas em (7) sem grandes dificuldades, embora o número de parâmetros em  $\gamma$  rapidamente torne-se proibitivo de ser tratado em termos da complexidade computacional demandada.

# Observações

## Comentários

- Condições na forma de LMIs podem ser obtidas usando-se as relaxações mostradas anteriormente;
- Extensões para tratar critérios como custo garantido  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  no contexto dessa classe de sistemas podem ser obtidas;
- As variáveis de folga também podem ser usadas, fornecendo vantagens em termos de análise ao custo de maior esforço computacional.

## Exemplo

● Considere um sistema politópico discreto variante no tempo com a matriz dinâmica dada por  $A(\alpha) = \alpha_1(k)A_1 + \alpha_2(k)A_2$ . A taxa de variação dos parâmetros é  $-0.7 \leq \Delta\alpha_i \leq 0.7$ ,  $i = 1, 2$ . O objetivo é investigar a estabilidade robusta desse sistema usando a função de Lyapunov  $v(x) = x'(\alpha_1(k)P_1 + \alpha_2(k)P_2)x$ .

● A primeira etapa consiste em encontrar a matriz de transformação  $H$  que é composta pelos vértices do politopo  $\Gamma$ . Nesse caso, a matriz  $H$  é dada por

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0.7 & 0.3 \\ -0.7 & 0 & 0 & 0.7 & 0.7 & -0.7 \\ 0.7 & 0 & 0 & -0.7 & -0.7 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

● O próximo passo é converter as matrizes  $A(\alpha)$ ,  $P(\alpha)$  e  $P(\alpha + \Delta\alpha)$  para o espaço  $\gamma$ .

## Exemplo

- Com as relações

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + 0.3\gamma_5 + 0.7\gamma_6, & \alpha_2 &= \gamma_3 + \gamma_4 + 0.7\gamma_5 + 0.3\gamma_6 \\ \Delta\alpha_1 &= -0.7\gamma_1 + 0.7\gamma_4 + 0.7\gamma_5 - 0.7\gamma_6, & \Delta\alpha_2 &= 0.7\gamma_1 - 0.7\gamma_4 - 0.7\gamma_5 + 0.7\gamma_6,\end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}A(\alpha) &= (\gamma_1 + \gamma_2 + 0.3\gamma_5 + 0.7\gamma_6)A_1 + (\gamma_3 + \gamma_4 + 0.7\gamma_5 + 0.3\gamma_6)A_2 \\ &= \underbrace{A_1}_{\bar{A}_1} \gamma_1 + \underbrace{A_1}_{\bar{A}_2} \gamma_2 + \underbrace{A_2}_{\bar{A}_3} \gamma_3 + \underbrace{A_2}_{\bar{A}_4} \gamma_4 + \underbrace{(0.3A_1 + 0.7A_2)}_{\bar{A}_5} \gamma_5 + \underbrace{(0.7A_1 + 0.3A_2)}_{\bar{A}_6} \gamma_6 \\ &= \sum_{j=1}^6 \bar{A}_j \gamma_j \\ &= \bar{A}(\gamma)\end{aligned}$$

De maneira similar, obtém-se  $\bar{P}(\gamma)$  a partir de  $P(\alpha) = \alpha_1(k)P_1 + \alpha_2(k)P_2$ .

## Exemplo

- Para converter  $P(\alpha + \Delta\alpha)$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 P(\alpha + \Delta\alpha) &= (\alpha_1 + \Delta\alpha_1)P_1 + (\alpha_2 + \Delta\alpha_2)P_2 \\
 &= (0.3\gamma_1 + \gamma_2 + 0.7\gamma_4 + \gamma_5)P_1 + (0.7\gamma_1 + \gamma_3 + 0.3\gamma_4 + \gamma_6)P_2 \\
 &= \underbrace{(0.3P_1 + 0.7P_2)}_{\tilde{P}_1} \gamma_1 + \underbrace{P_1}_{\tilde{P}_2} \gamma_2 + \underbrace{P_2}_{\tilde{P}_3} \gamma_3 + \underbrace{(0.7P_1 + 0.3P_2)}_{\tilde{P}_4} \gamma_4 + \underbrace{P_1}_{\tilde{P}_5} \gamma_5 + \underbrace{P_2}_{\tilde{P}_6} \gamma_6 \\
 &= \sum_{j=1}^6 \tilde{P}_j \gamma_j \\
 &= \tilde{P}(\gamma)
 \end{aligned}$$

- Finalmente, pode-se aplicar qualquer relaxação vista nas aulas anteriores na seguinte LMI dependente de parâmetros

$$\begin{bmatrix} \bar{P}(\gamma) & \bar{A}(\gamma)' \tilde{P}(\gamma) \\ \star & \tilde{P}(\gamma) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall \gamma \in \Lambda_M$$

## Exemplo

- Considere agora a matriz

$$A(\alpha(k)) = \alpha_1(k) \begin{bmatrix} -0.1 & 1.1 \\ -0.8 & -0.3 \end{bmatrix} + \alpha_2(k) \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.4 & -0.3 \end{bmatrix}$$

Aplicando a relaxação de polinômios quadráticos na LMI dependente de parâmetros apresentada anteriormente, obtém-se a seguinte solução ( $V = 6$ ,  $L = 84$ )

$$P(\alpha) = \alpha_1(k) \begin{bmatrix} 0.6641 & 0.1044 \\ 0.1044 & 0.9508 \end{bmatrix} + \alpha_2(k) \begin{bmatrix} 0.5319 & -0.0806 \\ -0.0806 & 0.7935 \end{bmatrix},$$

certificando a estabilidade robusta do sistema para todo  $(\alpha(k), \Delta\alpha(k)) \in \Gamma$ .

# Algoritmo para o Cômputo dos vetores $h^j$

● O algoritmo (de complexidade exponencial) de montagem do conjunto  $\mathcal{D}$  pode ser sintetizado na seguinte forma: Encontre todas soluções de

$$\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 + \dots + \dot{\alpha}_N = 0$$

tomando os extremos das restrições

$$\underline{b}_j \leq \dot{\alpha}_j(t) \leq \bar{b}_j, \quad i = 1, \dots, N$$

● Exemplo:  $N = 2$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 2$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 3$ . Tomando o extremo inferior de  $\dot{\alpha}_1(t)$ , tem-se

$$-1 + \dot{\alpha}_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_2(t) = 1$$

Como  $\dot{\alpha}_2(t) = 1$  pertence ao domínio de  $\dot{\alpha}_2(t)$ , então o vetor  $[-1 \ 1]'$  define uma coluna do conjunto  $\mathcal{D}$ . Na seqüência toma-se o extremo superior de  $\dot{\alpha}_1(t)$ , ou seja

$$2 + \dot{\alpha}_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_2(t) = -2.$$

Como  $\dot{\alpha}_2(t) = -2$  não pertence ao domínio de  $\dot{\alpha}_2(t)$ , o vetor  $[2 \ -2]'$  é descartado. Agora os extremos de  $\dot{\alpha}_2(t)$  são considerados, ou seja

$$\dot{\alpha}_1(t) - 1 = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_1(t) = 1, \quad \text{Solução válida}$$

Gerando

$$[h^1 \ h^2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



# Algoritmo: Exemplo $N = 3$

- Exemplo:  $N = 3$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_1(t) \leq 1$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_2(t) \leq 1$ ,  $-1 \leq \dot{\alpha}_3(t) \leq 1$ . Primeiro passo:

$$-1 + \dot{\alpha}_2(t) + \dot{\alpha}_3(t) = 0$$

Para que reste apenas uma variável, os limitantes de  $\dot{\alpha}_2(t)$  também são substituídos (começando pelo inferior)

$$-1 - 1 + \dot{\alpha}_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_3(t) = 2. \text{ Solução não válida.}$$

Com o limitante superior de  $\dot{\alpha}_2(t)$ , tem-se

$$-1 + 1 + \dot{\alpha}_3(t) = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}_3(t) = 0.$$

que é uma solução válida, gerando o primeiro vetor  $([-1 \ 1 \ 0]')$  do conjunto  $\mathcal{D}$ . Repetindo o procedimento, conseguem-se todas as soluções válidas gerando

$$[h^1 \ h^2 \ h^3 \ h^4 \ h^5 \ h^6] = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$