IA892 – Análise e Controle de Sistemas Lineares por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Aula 10: Realimentação de saída

Pedro L. D. Peres & Ricardo C. L. F. Oliveira

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas

2^o Semestre 2021

Tópicos

Estabilização por Realimentação de Saída

Seja um sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p$$

Problema

Determinar uma matriz $L \in \mathbb{R}^{m \times p}$ tal que a lei de controle linear $u(t) = Ly(t)$ estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$\dot{x}(t) = (A + BLC)x(t)$$

- $(A + BLC)$ é estável se e somente se existir $P > 0$ tal que

$$(A+BLC)'P + P(A+BLC) = A'P + PA + C'L'B'P + PBLC < 0$$

se e somente se existir $P^{-1} > 0$ tal que

$$P^{-1}(A+BLC)' + (A+BLC)P^{-1} = P^{-1}A' + AP^{-1} + P^{-1}C'L'B' + BLCP^{-1} < 0$$

se e somente se existir uma realimentação de estados $K = LC \iff KC^{\perp} = \mathbf{0}$

Comentários

- Termos $PBLC$ e $BLCP^{-1}$ de difícil manipulação

- No caso de B (ou C) quadrada e invertível, um problema equivalente de realimentação de estados pode ser determinado

- Aplicando o Lema da Projeção

- Existe L estabilizante se e somente se existir $P > 0$ tal que

$$B'^{\perp'}(P^{-1}A' + AP^{-1})B'^{\perp} < 0 \quad \text{e} \quad C^{\perp'}(PA + A'P)C^{\perp} < 0$$

- As LMIs acima não definem um conjunto convexo em P

- Problema equivalente: existirem $X = X' > 0$ e $Y = Y' > 0$ tais que

$$B'^{\perp'}(XA' + AX)B'^{\perp} < 0 \quad \text{e} \quad C^{\perp'}(YA + A'Y)C^{\perp} < 0$$

com a restrição (não convexa) $XY = \mathbf{I}$

Uma solução

- Uma solução: considere o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p$$

Lema 1

Existe L tal que $(A + BLC)$ é estável se e somente se existir $R \in \mathbb{R}^{(n-p)\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$T = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline R \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad , \qquad \text{com rank}\,(T) = n$$

$$W > 0 \quad ; \quad AW + WA' + BZ + Z'B' < 0$$

$$CWR' = \mathbf{0} \quad e \quad ZR' = \mathbf{0}$$

No caso afirmativo, $K = ZW^{-1} = ZC'(CWC')^{-1}C$ e $L = ZC'(CWC')^{-1}$ é o ganho estabilizante de realimentação de saída.

Prova

Prova: Suficiência. Supondo que a LMI é verificada e que T^{-1} existe, tem-se que $K = ZW^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estados e

$$K = ZT'(TWT')^{-1}T = Z\begin{bmatrix} C' & R' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} CWC' & CWR' \\ RWC' & RWR' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

Impondo as restrições $CWR' = \mathbf{0}$ e $ZR' = \mathbf{0}$ obtém-se

$$K = \begin{bmatrix} ZC' & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (CWC')^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (RWR')^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} = \underbrace{ZC'(CWC')^{-1}}_{L}C$$

Necessidade. Se existe L tal que $A + BLC$ é estável, então $\exists W > 0$ tal que

$$(A+BLC)W + W(A+BLC)' = AW + WA' + BLCW + WC'L'B' < 0$$

$\Longrightarrow Z = LCW$ verifica a LMI e $R' = W^{-1}C^{\perp}$ verifica as outras duas hipóteses.

Transformação de similaridade

- Note que, se $C = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \end{array}\right]$ e $R = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{(n-p)\times p} & \mathbf{I}_{(n-p)} \end{array}\right]$, as restrições $CWR' = \mathbf{0}$ e $ZR' = \mathbf{0}$ são restrições estruturais nas matrizes W e Z

$$CWR' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & W_{12} \\ \hline W_{12}' & W_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{array}\right] = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad W_{12} = \mathbf{0}$$

$$ZR' = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11} & Z_{12} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{array}\right] = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad Z_{12} = \mathbf{0}$$

- Dado um sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad ; \quad y(t) = Cx(t)$$

qualquer escolha de matriz R tal que T^{-1} exista define uma transformação de similaridade que leva a matriz de saída à forma

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \end{array}\right]$$

Condição LMI com restrições de estrutura nas variáveis

- Considere $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$; $y(t) = Cx(t)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$
  - Com $T = \left[\begin{array}{c} C \\ \hline R \end{array}\right]$ com R arbitrária tal que T^{-1} exista, obtenha $\bar{x} = Tx$

$$\dot{\bar{x}}(t) = \underbrace{TAT^{-1}}_{\bar{A}}\bar{x}(t) + \underbrace{TB}_{\bar{B}}u(t) \quad ; \quad y(t) = CT^{-1}\bar{x}(t) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \end{array}\right]\bar{x}(t)$$

Lema 2

Se existirem $W_o = W_o' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $Z_o \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tais que

$$W_o = \left[\begin{array}{c|c} W_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & W_{22} \end{array}\right] > 0 \;;\; Z_o = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11} & \mathbf{0} \end{array}\right] \;,\; W_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}, W_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$$

$$\bar{A}W_o + W_o\bar{A}' + \bar{B}Z_o + Z_o'\bar{B}' < 0$$

então $\bar{K} = Z_oW_o^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11}W_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{m\times(n-p)} \end{array}\right]$ estabiliza o sistema transformado e $L = Z_{11}W_{11}^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de saída para o sistema original.

Comentários

Prova: Note que $\bar{K} = Z_o W_o^{-1}$ é um ganho estabilizante de realimentação de estados para o sistema transformado e que

$$K = \bar{K}T = \left[\begin{array}{c|c} Z_{11}W_{11}^{-1} & \mathbf{0}_{p\times(n-p)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} C \\ \hline R \end{array} \right] = LC$$

com $L = Z_{11}W_{11}^{-1}$.

- Dada uma matriz R, tem-se um teste convexo para a existência de um ganho estabilizante de realimentação de saída
- Condições suficientes
- Problema: determinação da matriz R

✔ Extensão para controle robusto por realimentação de saída

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante

- É possível calcular um ganho estabilizante por realimentação de saída se um ganho estabilizante de realimentação de estados estiver disponível. Essa técnica é conhecida como "método dos dois estágios".

Lema 3

Dado um ganho K tal que $A+BK$ é assintoticamente estável, existe um ganho estabilizante de realimentação de saída L tal que $A+BLC$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $P=P'>0$, F, G, H e J tais que

$$\begin{bmatrix} A'F'+FA+K'B'F'+FBK & P-F+A'G'+K'B'G' & FB+C'J'-K'H' \\ P-F'+GA+GBK & -G-G' & GB \\ B'F'+JC-HK & B'G' & -H-H' \end{bmatrix} < 0$$

No caso afirmativo, o ganho de realimentação de saída é dado por $L=H^{-1}J$.

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante — Prova

- Pré-multiplique a LMI do Lema 3 por T e pós-multiplique por T', com

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & S' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad S = H^{-1}JC - K$$

para obter

$$\begin{bmatrix} (A+BLC)'F' + F(A+BLC) & P - F + (A+BLC)'G' \\ P - F' + G(A+BLC) & -G - G' \end{bmatrix} < 0$$

que é a condição de estabilidade para $(A+BLC)$, com $L = H^{-1}J$, baseada no Lema de Finsler.

A mesma transformação com $S = \mathbf{0}$ fornece um certificado da estabilidade de $A+BK$ (hipótese inicial), pois

$$\begin{bmatrix} (A+BK)'F' + F(A+BK) & P - F + (A+BK)'G' \\ P - F' + G(A+BK) & -G - G' \end{bmatrix} < 0$$

Condição Necessária e Suficiente na forma de BMI

- Pode ser vista como uma aplicação do lema da Projeção.

Lema 4

Existem $P = P' > 0$, K, F, G, H e J tais que

$$
\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B'F' + FBK & P - F + A'G' + K'B'G' & FB + C'J' - K'H' \\ P - F' + GA + GBK & -G - G' & GB \\ B'F' + JC - HK & B'G' & -H - H' \end{bmatrix}
$$
$$
= \underbrace{\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B'F' + FBK & P - F + A'G' + K'B'G' & FB \\ P - F' + GA + GBK & -G - G' & GB \\ B'F' & B'G' & 0 \end{bmatrix}}_{Z}
$$
$$
+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}}_{U'} H \underbrace{\begin{bmatrix} S & 0 & -I \end{bmatrix}}_{V} + \begin{bmatrix} S' \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} H' \begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (1)
$$

Condição Necessária e Suficiente na forma de BMI (cont.)

Lema 4 (cont.)

se e somente se existirem $P = P' > 0$, K, F, G, H e J tais que

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B'F' + FBK & P - F + A'G' + K'B'G' & FB \\ P - F' + GA + GBK & -G - G' & GB \\ B'F' & B'G' & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N_U}$$

$$= \begin{bmatrix} (A+BK)'F' + F(A+BK) & P - F + (A+BK)'G' \\ P - F' + G(A+BK) & -G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 & S' \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B'F' + FBK & P - F + A'G' + K'B'G' & FB \\ P - F' + GA + GBK & -G - G' & GB \\ B'F' & B'G' & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ S & 0 \end{bmatrix}}_{N_V}$$

$$= \begin{bmatrix} (A+BLC)'F' + F(A+BLC) & P - F + (A+BLC)'G' \\ P - F' + G(A+BLC) & -G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

com $L = H^{-1}J$ e $S = H^{-1}JC - K$

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante

Comentários

- A mesma matriz de Lyapunov P certifica a estabilidade do sistema em malha fechada tanto para o ganho de realimentação de estado (dado de entrada) quanto para o sistema realimentado pela saída;
- Trata-se de uma condição suficiente apenas. Caso não exista solução para um certo K, pode-se tentar com outro ganho estabilizante;
- A condição pode ser estendida para tratar sistemas incertos politópicos, inclusive no caso de matriz de saída incerta;
- No caso incerto, pode-se utilizar um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros como dado de entrada, e buscar funções de Lyapunov dependentes de parâmetros como certificados para a estabilidade simultânea de $A(\alpha)+B(\alpha)K(\alpha)$ e $A(\alpha)+B(\alpha)LC(\alpha)$;
- A estratégia pode ser usada para computar um ganho robusto de realimentação de estados a partir de um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros, bastando fazer $C=\mathbf{I}_n$ e adequar a dimensão da matriz J.

Realimentação de saída: caso $\mathscr{H}_\infty$

- Considere

$$\dot{x} = Ax + B_2 u + B_1 w, \quad y = C_2 x + D_y w, \quad z = Cx + D_2 u + D_1 w$$

- Realimentação estática de saída $u = Ly$

$$\dot{x} = \big(A + B_2 L C_2\big)x + \big(B_1 + B_2 L D_y\big)w, \quad z = \big(C + D_2 L C_2\big)x + \big(D_1 + D_2 L D_y\big)w$$

- Função de transferência em malha fechada

$$H(s) = (C + D_2 L C_2)\big(sI - (A + B_2 L C_2)\big)^{-1}(B_1 + B_2 L D_y) + (D_1 + D_2 L D_y)$$

Condições na forma de BMIs (caso $\mathscr{H}_\infty$)

Lema 5

Existem $P = P' > 0$, K, F, G, H e J tais que

$$\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B_2'F' + FB_2K & P - F + A'G' + K'B_2'G' & FB_1 & C' + K'D_2' & FB_2 + C_2'J' - K'H' \\ P - F' + GA + GB_2K & -G - G' & GB_1 & 0 & GB_2 \\ B_1'F' & B_1'G' & -I & D_1' & D_y'J' \\ C + D_2K & 0 & D_1 & -\gamma^2 I & D_2 \\ B_2'F' + JC_2 - HK & B_2'G' & JD_y & D_2' & -H - H' \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

se e somente se

Condições na forma de BMIs (caso $\mathscr{H}_\infty$)

Lema 5 (cont.)

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)'F'+F(A+B_2K) & P-F+(A+B_2K)'G' & FB_1 & (C+D_2K)' \\ P-F'+G(A+B_2K) & -G-G' & GB_1 & 0 \\ B_1'F' & B_1'G' & -I & D_1' \\ C+D_2K & 0 & D_1 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

e

$$\begin{bmatrix} (A+B_2LC_2)'F'+F(A+B_2LC_2) & P-F+(A+B_2LC_2)'G' \\ P-F'+G(A+B_2LC_2) & -G-G' \\ (B_1+B_2LD_y)'F' & (B_1+B_2LD_y)'G' \\ C+D_2LC_2 & 0 \end{bmatrix.$$
$$\left. \begin{matrix} F(B_1+B_2LD_y) & (C+D_2LC_2)' \\ G(B_1+B_2LD_y) & 0 \\ -I & (D_1+D_2LD_y)' \\ (D_1+D_2LD_y) & -\gamma^2 I \end{matrix} \right] < 0 \quad (6)$$

com $L = H^{-1}J$.

Condições na forma de BMIs (caso $\mathscr{H}_\infty$) — Prova

De fato, usando novamente o lema da Projeção com

$$Z = \begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B_2'F' + FB_2K & P - F + A'G' + K'B_2'G' & FB_1 & C' + K'D_2' & FB_2 \\ P - F' + GA + GB_2K & -G - G' & GB_1 & 0 & GB_2 \\ B_1'F' & B_1'G' & -I & D_1' & 0 \\ C + D_2K & 0 & D_1 & -\gamma^2 I & D_2 \\ B_2'F' & B_2'G' & 0 & D_2' & 0 \end{bmatrix}$$

$$U' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad V' = \begin{bmatrix} S' \\ 0 \\ Q' \\ 0 \\ -I \end{bmatrix}, \quad N_V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ S & 0 & Q & 0 \end{bmatrix}, \quad N_U = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$S = H^{-1}JC_2 - K$ e $Q = H^{-1}JD_y$, tem-se

$$Z + U'HV + V'H'U < 0 \iff N_U'ZN_U < 0 \text{ e } N_V'ZN_V < 0$$

Estabilização por Realimentação de Saída: Caso Discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad ; \quad y(k) = Cx(k) \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^p$$

Problema

Determinar uma matriz $L \in \mathbb{R}^{m\times p}$ tal que a lei de controle linear $u(k) = Ly(k)$ estabilize assintoticamente o sistema em malha fechada

$$x(k+1) = (A+BLC)x(k)$$

- $(A+BLC)$ é estável se e somente se existir $W = W'$ tal que

$$(A+BLC)W(A+BLC)' - W < 0 \iff \begin{bmatrix} W & (A+BLC)W \\ W(A+BLC)' & W \end{bmatrix} > 0$$

se e somente se existirem $W = W'$ e G tais que

$$\begin{bmatrix} W & (A+BLC)G \\ G(A+BLC)' & G+G'-W \end{bmatrix} > 0$$

se e somente se existir uma realimentação de estados $K = LC \iff KC^{\perp} = \mathbf{0}$

Comentários

- Condições suficientes podem ser obtidas de maneira similar ao caso contínuo, quando a matriz de saída é constante

- A restrição de estrutura no ganho de realimentação de estados pode ser imposta tanto no ganho quadrático $K = ZW^{-1}$ quanto no obtido por meio do Lema de Finsler $K = ZG^{-1}$

- Extensões para tratar controle robusto por realimentação de saída, com critérios de desempenho $\mathscr{H}_2$ ou $\mathscr{H}_\infty$, podem ser obtidas das condições de realimentação de estados.

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante

Lema 6

Dado um ganho K tal que $A+BK$ é assintoticamente estável, existe um ganho estabilizante de realimentação de saída L tal que $A+BLC$ é assintoticamente estável se existirem matrizes $P=P'>0$, F, G, H e J tais que

$$\begin{bmatrix} P-A'F'-FA-K'B'F'-FBK & -F+A'G'+K'B'G' & -FB-K'H'+C'J' \\ -F'+GA+GBK & G+G'-P & GB \\ -B'F'-HK+JC & B'G' & -H-H' \end{bmatrix} > 0$$

No caso afirmativo, o ganho de realimentação de saída é dado por $L=H^{-1}J$.

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante — Prova

- Pré-multiplique a LMI do Lema 6 por T e pós-multiplique por T', com

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & S' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad S = H^{-1}JC - K$$

para obter

$$\begin{bmatrix} P - (A+BLC)'F' - F(A+BLC) & -F + (A+BLC)'G' \\ -F' + G(A+BLC) & G + G' - P \end{bmatrix} > 0$$

que é a condição de estabilidade para $(A+BLC)$, com $L = H^{-1}J$, baseada no Lema de Finsler.

A mesma transformação com $S = \mathbf{0}$ fornece um certificado da estabilidade de $A+BK$ (hipótese inicial), pois

$$\begin{bmatrix} P - (A+BK)'F' - F(A+BK) & -F + (A+BK)'G' \\ -F' + G(A+BK) & G + G' - P \end{bmatrix} > 0$$

Realimentação de saída a partir de um ganho de estado estabilizante

Comentários

- Os comentários do caso contínuo também são validos no caso discreto: condição apenas suficiente, pode ser testada para mais de um ganho K estabilizante, pode ser estendida para tratar sistemas incertos $(A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha))$ politópicos;
- No caso incerto, pode-se utilizar um ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros $K(\alpha)$ como parâmetro de entrada, que deve ser gerado com a maior generalidade possível. O Lema 6 pode então procurar por funções de Lyapunov dependentes de parâmetros como certificados para a estabilidade simultânea de $A(\alpha)+B(\alpha)K(\alpha)$ e $A(\alpha)+B(\alpha)LC(\alpha)$ ao mesmo tempo que busca o ganho robusto L de realimentação de saída;
- Para ganhos estabilizantes de estado dados por $K(\alpha) = Z(\alpha)G(\alpha)^{-1}$, com

$$Z(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i Z_i \;\; , \;\; G(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i G_i \;\; , \;\; \alpha \in \Lambda_N$$

as condições podem ser escritas diretamente em termos das matrizes Z_i, G_i, $i = 1, \ldots, N$.

Realimentação de saída: caso $\mathscr{H}_\infty$ discreto

Lema 7

Existem $P = P' > 0$, K, F, G, H e J tais que

$$\begin{bmatrix} A'F' + FA + K'B_2'F' + FB_2K - P & -F + A'G' + K'B_2'G' & FB_1 & C' + K'D_2' & FB_2 + C_2'J' - K'H' \\ -F' + GA + GB_2K & P - G - G' & GB_1 & 0 & GB_2 \\ B_1'F' & B_1'G' & -I & D_1' & D_y'J' \\ C + D_2K & 0 & D_1 & -\gamma^2 I & D_2 \\ B_2'F' + JC_2 - HK & B_2'G' & JD_y & D_2' & -H - H' \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

se e somente se

Realimentação de saída: caso $\mathscr{H}_\infty$ discreto

Lema 7 (cont.)

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)'F'+F(A+B_2K)-P & -F+(A+B_2K)'G' & FB_1 & (C+D_2K)' \\ -F'+G(A+B_2K) & P-G-G' & GB_1 & 0 \\ B_1'F' & B_1'G' & -I & D_1' \\ C+D_2K & 0 & D_1 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

e

$$\begin{bmatrix} (A+B_2LC_2)'F'+F(A+B_2LC_2)-P & -F+(A+B_2LC_2)'G' & F(B_1+B_2LD_y) & (C+D_2LC_2)' \\ -F'+G(A+B_2LC_2) & P-G-G' & G(B_1+B_2LD_y) & 0 \\ (B_1+B_2LD_y)'F' & (B_1+B_2LD_y)'G' & -I & (D_1+D_2LD_y)' \\ C+D_2LC_2 & 0 & (D_1+D_2LD_y) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

com $L = H^{-1}J$.

Controlador dinâmico por realimentação estática de saída

- Considere o sistema

$$\delta[x] = Ax + Bu \quad , \quad y = Cx$$

e o controlador dinâmico de ordem n_c

$$\delta[x_c] = A_c x_c + B_c y \quad , \quad u = C_c x_c + D_c y$$

sendo que $\delta[x]$ representa o operador derivada (sistemas contínuos) ou deslocamento (sistemas discretos). Definindo o sistema aumentado, tem-se

$$\begin{bmatrix} \delta[x] \\ \delta[x_c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

As matrizes A_c, B_c, C_c e D_c do controlador podem ser obtidas como solução do problema de realimentação estática de saída: determine L tal que

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_c} \end{bmatrix}}_{\widetilde{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B \\ \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_c} \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\widetilde{C}}$$

seja estável. Note que quando $n_c = 0$ recai-se na realimentação estática de saída para o sistema original.